

DEFINICJA I OZNACZENIA TRÓJKĄTA

Trójkątem nazywamy wielokąt mający trzy boki.

wierzchołki oznaczamy wielkimi literami: A, B, C ; D, E, F itp.

boki oznaczamy małymi literami: a, b, c ; d, e, f itp.

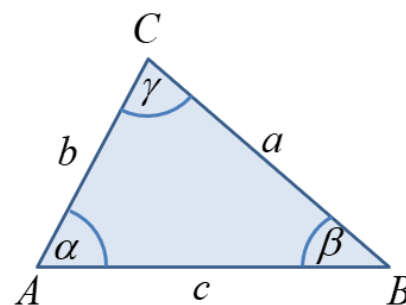
odpowiednia mała litera leży naprzeciw danego wierzchołka:

- naprzeciw wierzchołka A leży bok długości a

kąty oznaczamy małymi greckimi literami: α, β, γ

kąt α przy wierzchołku A , kąt β przy wierzchołku B ,

kąt γ przy wierzchołku C



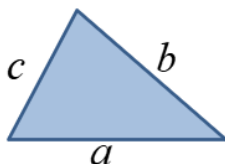
Suma miar kątów wewnętrznych dowolnego trójkąta jest równa 180° : $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

Obwód trójkąta: $Obw = a + b + c$

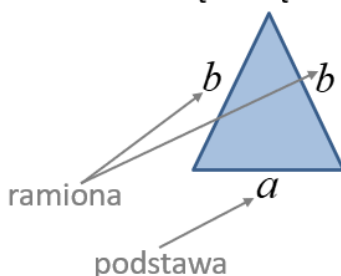
PODZIAŁ TRÓJKĄTÓW

ZE WZGLĘDU NA DŁUGOŚCI BOKÓW

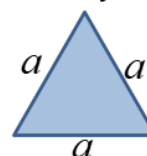
trójkąty różnoboczne
(każdy bok ma inną długość)



trójkąty równoramienne
(co najmniej dwa boki mają tę samą długość)

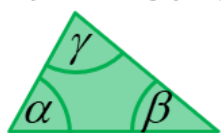


trójkąty równoboczne
(wszystkie boki tej samej długości)



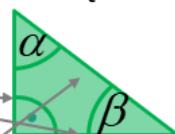
ZE WZGLĘDU NA MIARY KĄTÓW

trójkąty ostrokątne
(wszystkie kąty są ostre)



$$\alpha, \beta, \gamma \in (0^\circ, 90^\circ)$$

trójkąty prostokątne
(jeden kąt jest prosty i dwa są ostre)



$$\alpha, \beta \in (0^\circ, 90^\circ)$$

przyprostokątne

przeciwprostokątna

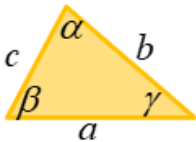
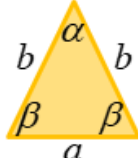
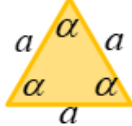
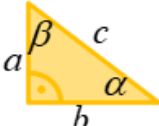
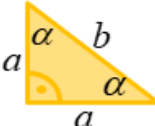
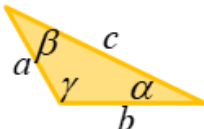
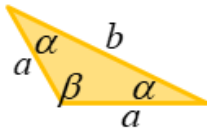
trójkąty rozwartokątne
(jeden kąt jest rozwarty i dwa są ostre)



$$\alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$$

$$\beta, \gamma \in (0^\circ, 90^\circ)$$

PODZIAŁ TRÓJKĄTÓW

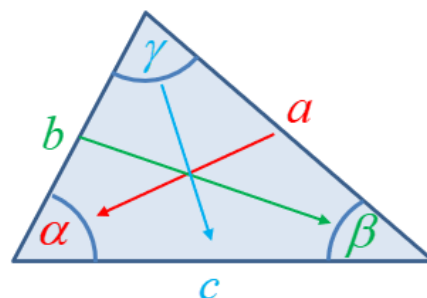
	RÓŻNOBOCZNE	RÓWNORAMIENNE	RÓWNOBOCZNE
OSTROKĄTNE	 $\alpha, \beta, \gamma \in (0^\circ, 90^\circ)$ $a > b > c$	 $\alpha, \beta \in (0^\circ, 90^\circ)$ $a \neq b$	 $\alpha = 60^\circ$
PROSTOKĄTNE	 $\alpha, \beta \in (0^\circ, 90^\circ)$ $a < b < c$	 $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ)$ $a < b$	×
ROZWARTOKĄTNE	 $\alpha, \beta \in (0^\circ, 90^\circ)$ $\gamma \in (90^\circ, 180^\circ)$ $a < b < c$	 $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ)$ $\beta \in (90^\circ, 180^\circ)$ $a < b$	×

ZALEŻNOŚCI MIĘDZY BOKAMI I KĄTAMI TRÓJKĄTA

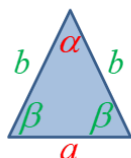
Jeżeli dwa kąty trójkąta mają różne miary, to bok leżący naprzeciw większego z nich jest dłuższy.

Jeżeli dwa boki trójkąta mają różne długości, to kąt leżący naprzeciw dłuższego z nich jest większy.

- **najkrótszy** bok naprzeciw **najmniejszego** kąta
- **średni** bok naprzeciw **średniego** kąta
- **najdłuższy** bok naprzeciw **największego** kąta

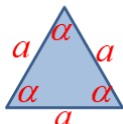


trójkąt równoramienny



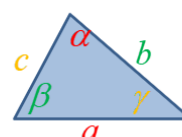
dwa równe boki
dwa równe kąty

trójkąt równoboczny



trzy równe boki
trzy równe kąty
 $\alpha = 60^\circ$

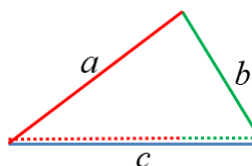
trójkąt różnoboczny



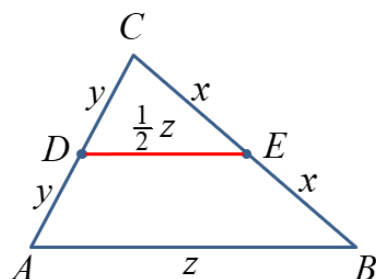
trzy różne boki
trzy różne kąty

NIERÓWNOŚĆ TRÓJKĄTA

Suma długości dwóch boków trójkąta jest większa niż długość trzeciego boku tego trójkąta.



$$\begin{aligned} a + b &> c \\ a + c &> b \\ b + c &> a \end{aligned}$$

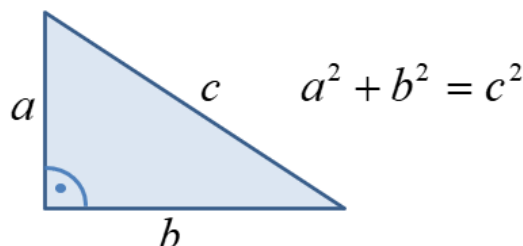


ODCINEK ŁĄCZĄCY ŚRODKI BOKÓW TRÓJKĄTA

Odcinek łączący środki dwóch boków trójkąta jest **równoległy do trzeciego boku**, a jego długość jest równa **połowie długości trzeciego boku**.

TWIERDZENIE PITAGORASA

Jeśli trójkąt jest prostokątny, to suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej.

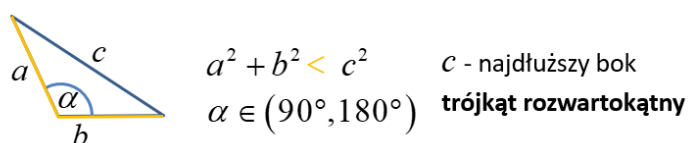
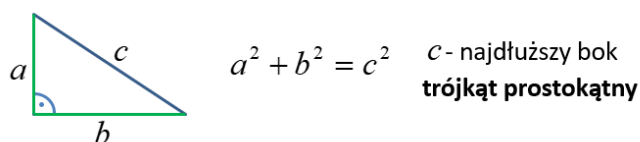
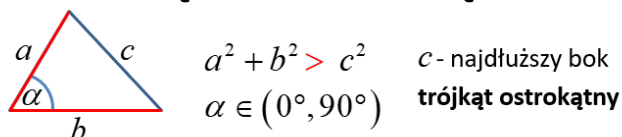


TWIERDZENIE ODWROTNE DO TWIERDZENIA PITAGORASA

Jeśli suma kwadratów długości dwóch krótszych boków jest równa kwadratowi długości najdłuższego boku, to trójkąt ten jest prostokątny.

Dwa krótsze boki nazywamy przyprostokątnymi, a najdłuższy bok – przeciwprostokątną.

ZASTOSOWANIE TWIERDZENIA PITAGORASA DO OKREŚLANIA KĄTÓW W TRÓJKĄCIE



Jeśli długości a, b, c boków trójkąta spełniają warunek $a \leq b \leq c$, to:

jeśli $a^2 + b^2 > c^2$ to trójkąt ten jest **ostrokątny**,
jeśli $a^2 + b^2 < c^2$, to trójkąt ten jest **rozwartokątny**,
oraz jeśli $a^2 + b^2 = c^2$, to trójkąt ten jest **prostokątny**.

WYSOKOŚCI W TRÓJKĄCIE

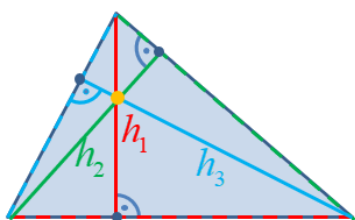
Wysokość trójkąta to odcinek łączący wierzchołek trójkąta z prostą zawierającą przeciwny bok i który jest prostopadły do tego boku.

Dowolny trójkąt ma trzy wysokości.

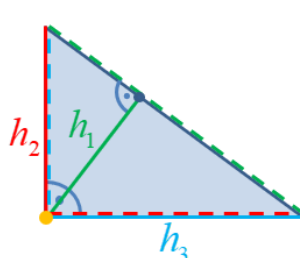
Punkt wspólny wysokości i boku, na który została opuszczona, nazywamy **spodkiem wysokości**.

W każdym trójkącie wysokości przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten nazywamy **ortocentrum trójkąta**.

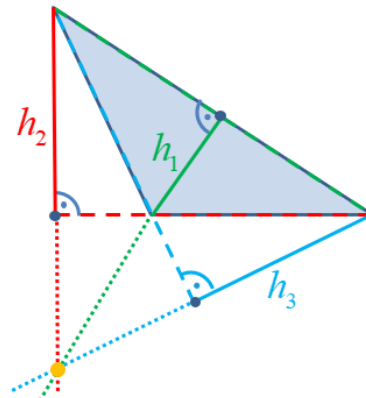
trójkąt ostrokątny



trójkąt prostokątny

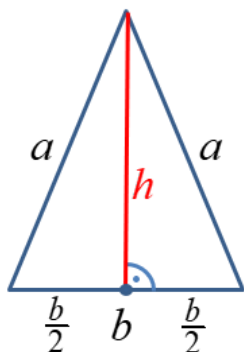


trójkąt rozwartokątny



TRÓJKĄT RÓWNORAMENNY

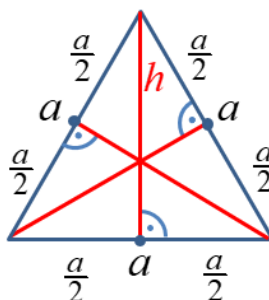
Spodek wysokości poprowadzonej na podstawę trójkąta równoramiennego dzieli tę podstawę na dwie równe części.



TRÓJKĄT RÓWNOBOCZNY

Spodek dowolnej wysokości trójkąta równobocznego dzieli bok trójkąta na dwie równe części.

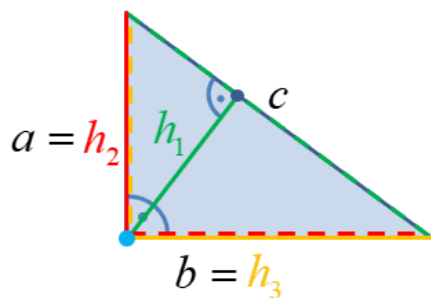
Punkt przecięcia wysokości w trójkącie równobocznym dzieli każdą z tych wysokości w stosunku 2:1 licząc od wierzchołka trójkąta.



$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

wzór na wysokość trójkąta równobocznego

TRÓJKĄT PROSTOKĄTNY

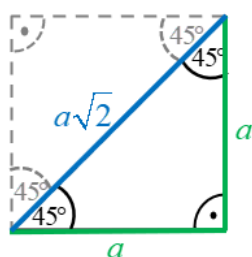


Dwie wysokości trójkąta prostokątnego pokrywają się z przyprostokątnymi tego trójkąta.

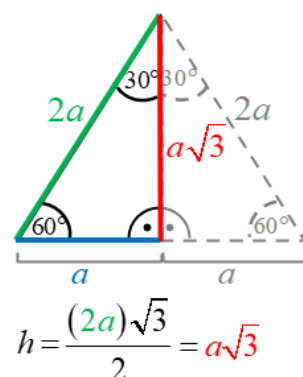
wzór na wysokość trójkąta prostokątnego poprowadzoną z wierzchołka kąta prostego $h_1 = \sqrt{xy}$

TRÓJKĄTY EKIERKOWE

TRÓJKĄT $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$



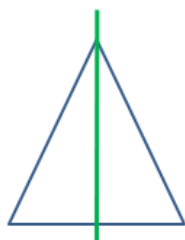
TRÓJKĄT $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$



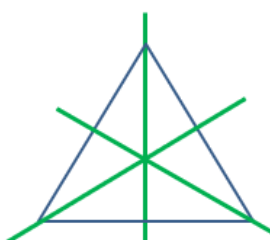
OSIE SYMETRII TRÓJKĄTA

Trójkąt może mieć:

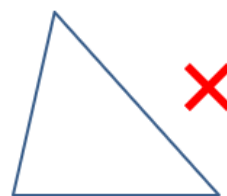
- 3 osie symetrii (równoboczny)
- 1 oś symetrii (równoramienny, nierównoboczny)
- 0 osi symetrii (różnoboczny)



trójkąt równoramienny



trójkąt równoboczny



trójkąt różnoboczny

ŚRODKOWE TRÓJKĄTA

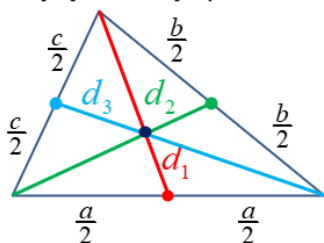
Środkowa trójkąta to odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku.

Dowolny trójkąt ma trzy środkowe. Każda środkowa jest zawarta wewnątrz trójkąta.

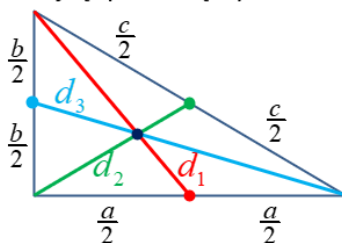
W każdym trójkącie środkowe przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten nazywamy **środkiem ciężkości trójkąta**.

W dowolnym trójkącie wszystkie trzy środkowe przecinają się w jednym punkcie, który dzieli te środkowe w stosunku 2:1 licząc od wierzchołka.

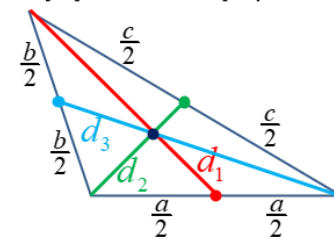
trójkąt ostrokątny



trójkąt prostokątny

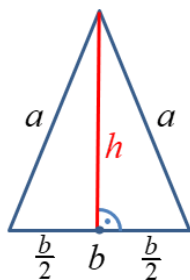


trójkąt rozwartokątny



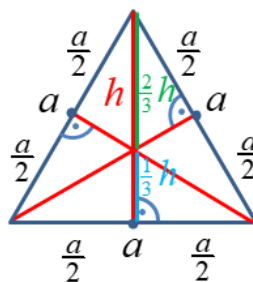
TRÓJKĄT RÓWNORAMIENNY

Wysokość poprowadzona na podstawę trójkąta równoramiennego jest jednocześnie środkową trójkąta.



TRÓJKĄT RÓWNOBOCZNY

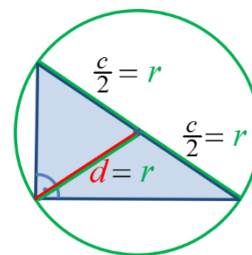
Wysokości w trójkącie równobocznym pokrywają się ze środkowymi tego trójkąta.



TRÓJKĄT PROSTOKĄTNY

Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego jest średnicą okręgu opisanego na tym trójkącie.

W trójkącie prostokątnym środkowa poprowadzona z wierzchołka kąta prostego ma długość równą połowie długości przeciwprostokątnej.



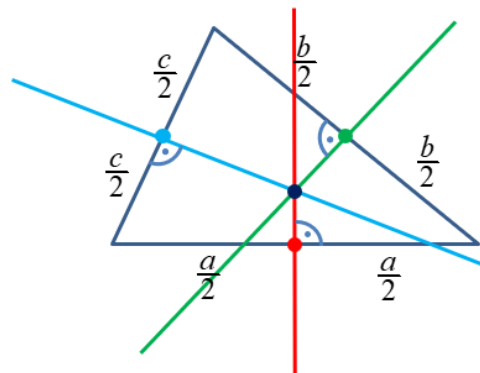
trójkąt prostokątny wpisany w okrąg

SYMETRALNE BOKÓW TRÓJKĄTA

Symetralna boku trójkąta to prosta prostopadła do tego boku, przechodząca przez jego środek.

Każdy trójkąt ma trzy symetralne boków i przecinają się one w jednym punkcie.

Punkt przecięcia symetralnych boków trójkąta jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie.

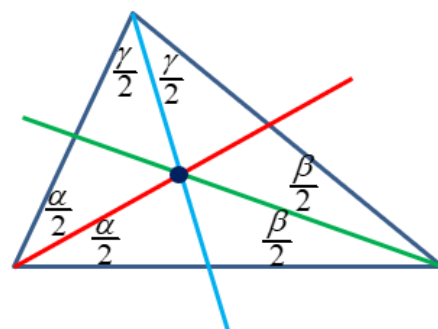


DWUSIECZNE KĄTÓW TRÓJKĄTA

Dwusieczna kąta trójkąta to półprosta dzieląca kąt wewnętrzny trójkąta na dwa równe kąty.

Każdy trójkąt ma trzy dwusieczne kątów wewnętrznych i przecinają się one w jednym punkcie.

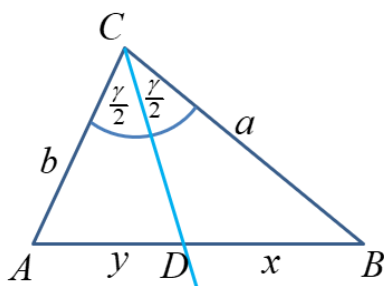
Punkt przecięcia dwusiecznych kątów wewnętrznych trójkąta jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt.



TWIERDZENIE O DWUSIECZNEJ

Dwusieczna kąta trójkąta dzieli przeciwległy bok na odcinki proporcjonalne do pozostałych dwóch boków trójkąta.

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$



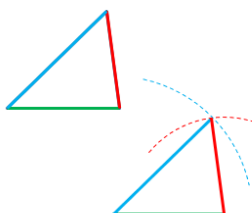
PRYZYSTAWIANIE TRÓJKĄTÓW

Dwa trójkąty są przystające wtedy i tylko wtedy, gdy mają równe boki i równe kąty.

Oznaczenie: $\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$

CECHY PRYZYSTAWANIA TRÓJKĄTÓW

BOK-BOK-BOK

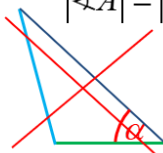


$$\begin{aligned} |AB| &= |A_1B_1| \\ |BC| &= |B_1C_1| \\ |AC| &= |A_1C_1| \end{aligned}$$

BOK-KĄT-BOK



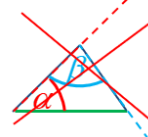
$$\begin{aligned} |AB| &= |A_1B_1| \\ |AC| &= |A_1C_1| \\ \sphericalangle A &= \sphericalangle A_1 \end{aligned}$$



KĄT-BOK-KĄT



$$\begin{aligned} |AB| &= |A_1B_1| \\ \sphericalangle A &= \sphericalangle A_1 \\ \sphericalangle B &= \sphericalangle B_1 \end{aligned}$$



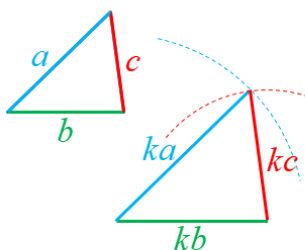
PODOBIENSTWO TRÓJKĄTÓW

Dwa trójkąty są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy mają proporcjonalne boki i równe kąty.

Oznaczenie: $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$

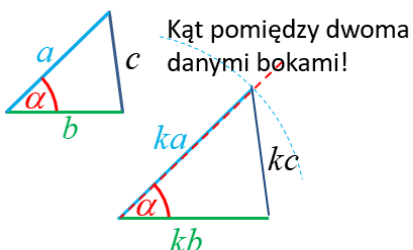
CECHY PODOBIENSTWA TRÓJKĄTÓW

BOK-BOK-BOK

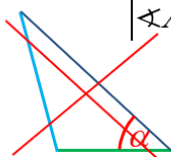


$$\begin{aligned} |A_1B_1| &= k |AB| \\ |B_1C_1| &= k |BC| \\ |A_1C_1| &= k |AC| \end{aligned}$$

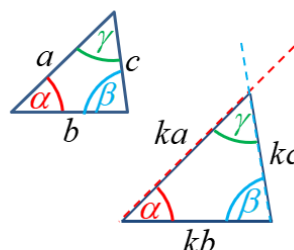
BOK-KĄT-BOK



$$\begin{aligned} |A_1B_1| &= k |AB| \\ |A_1C_1| &= k |AC| \\ \sphericalangle A &= \sphericalangle A_1 \end{aligned}$$



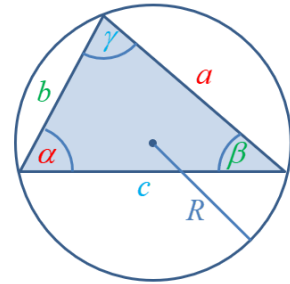
KĄT-KĄT-KĄT



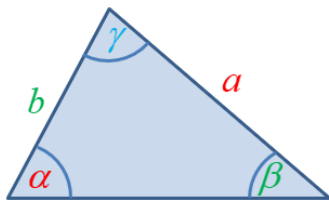
$$\begin{aligned} \sphericalangle A &= \sphericalangle A_1 \\ \sphericalangle B &= \sphericalangle B_1 \\ \sphericalangle C &= \sphericalangle C_1 \end{aligned}$$

TWIERDZENIE SINUSÓW

W dowolnym trójkącie stosunek długości boku do sinusa kąta leżącego naprzeciw tego boku jest stały i równy długości średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie.



$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$



TWIERDZENIE COSINUSÓW

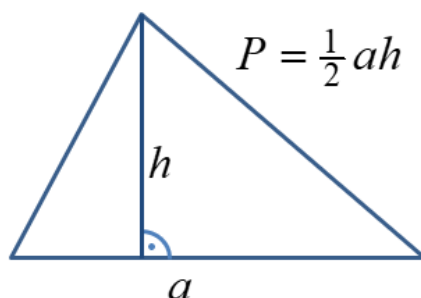
W dowolnym trójkącie kwadrat długości jednego boku jest równy sumie kwadratów długości dwóch pozostałych boków, zmniejszonej o podwojony iloczyn tych długości i cosinusa kąta zawartego między nimi.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

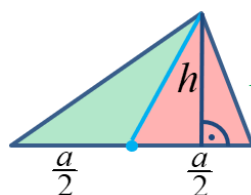
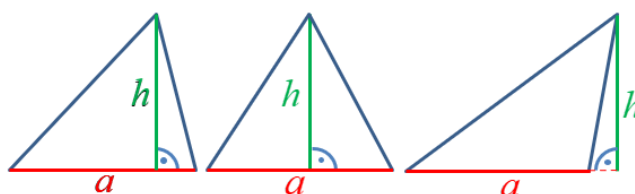
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

WZORY NA POLE TRÓJKĄTA



Różne trójkąty o tych samych podstawach i tych samych wysokościach opuszczonych na tę podstawę mają te równe pola.

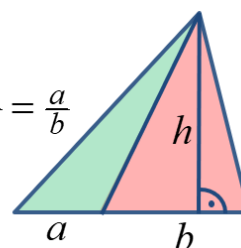


$$P_1 = P_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot h$$

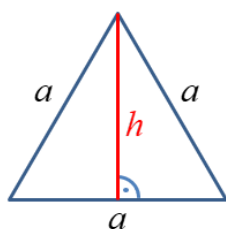
Środkowa dzieli trójkąt na dwa trójkąty o tych samych polach.

Jeśli dwa trójkąty mają tę samą wysokość, to stosunek ich pól jest równy stosunkowi długości podstaw, na które ta wysokość została opuszczona.

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\frac{1}{2} ah}{\frac{1}{2} bh} = \frac{a}{b}$$



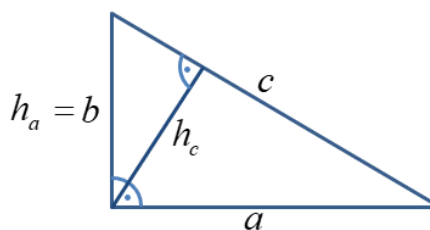
POLE TRÓJKĄTA RÓWNOBOCZNEGO



$$P = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

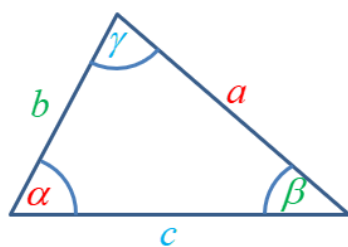
$$h = \frac{a \sqrt{3}}{2}$$

POLE TRÓJKĄTA PROSTOKĄTNEGO



$$P = \frac{1}{2} ab$$

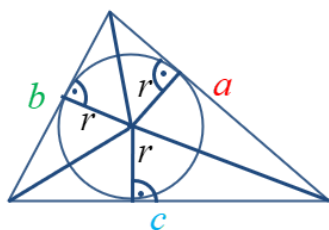
$$h_c = \frac{ab}{c}$$



$$P = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$$

$$P = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$$

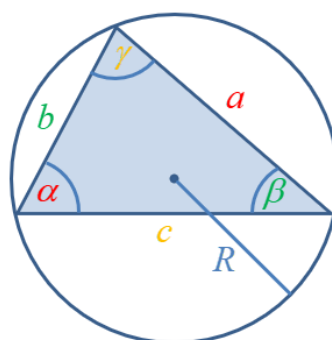
$$P = \frac{1}{2} ac \sin \beta$$



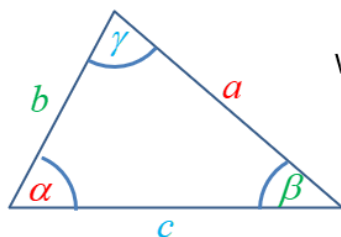
$$P = \frac{1}{2} ar + \frac{1}{2} br + \frac{1}{2} cr$$

$$P = \frac{1}{2} (a + b + c) r$$

$$P = pr \quad p = \frac{1}{2} (a + b + c)$$



$$P = \frac{abc}{4R}$$



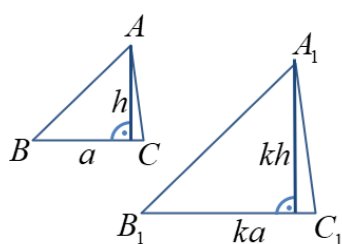
WZÓR HERONA: $P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$$P = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin \beta \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{1}{2} b^2 \frac{\sin \alpha \sin \gamma}{\sin \beta} = \frac{1}{2} c^2 \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin \gamma}$$

$$P = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \quad R - \text{promień okręgu opisanego na trójkącie}$$

POŁA TRÓJKĄTÓW PODOBNYCH

$$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$$



$$Obw_{A_1B_1C_1} = k \cdot Obw_{ABC}$$

$$P_{A_1B_1C_1} = k^2 \cdot P_{ABC}$$

Stosunek pól figur podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa.