



MECHANIKA PŁYNÓW

Wzory podstawowe

Gęstość

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\gamma}{g} \left[\frac{kg}{m^3} \right]$$

m - masa $[kg]$

V - objętość $[m^3]$

γ - ciężar właściwy $\left[\frac{N}{m^3} \right]$

g - przyspieszenie ziemskie $\left[9,81 \frac{m}{s^2} \right]$

Energia kinetyczna

$$E_K = \frac{mv^2}{2} [J]$$

m - masa $[kg]$

v - prędkość $\left[\frac{m}{s} \right]$

Energia potencjalna

$$E_P = mgh [J]$$

m - masa $[kg]$

g - przyspieszenie ziemskie $\left[9,81 \frac{m}{s^2} \right]$

h - wysokość $[m]$

Zasada zachowania energii

$$E_K + E_P = const$$

Praca siły

$$W = F \Delta x \cos(\alpha) [J]$$

F - siła $\left[N = \frac{kg \cdot m}{s^2} \right]$

Δx - droga (przesunięcie) $[m]$

$\cos(\alpha)$ - cosinus kąta pomiędzy wektorem siły i drogi

Droga

$$\Delta x = vt [m]$$

v - prędkość $\left[\frac{m}{s} \right]$

t - czas $[s]$

Ciśnienie

$$p = \rho gh = \gamma h [Pa]$$

ρ - gęstość $\left[\frac{kg}{m^3} \right]$

g - przyspieszenie ziemskie $\left[9,81 \frac{m}{s^2} \right]$

h - wysokość $[m]$

γ - ciężar właściwy $\left[\frac{N}{m^3} \right]$

Siła od ciśnienia

$$F = pS [N]$$

p - ciśnienie $\left[Pa = \frac{N}{m^2} = \frac{kg}{m \cdot s^2} \right]$

S - pole powierzchni $[m^2]$



Siła (wzór ogólny)

$$F = ma = mg [N]$$

m - masa $[kg]$

a - przyspieszenie $\left[\frac{m}{s^2}\right]$

g - przyspieszenie ziemskie $\left[9,81 \frac{m}{s^2}\right]$

Moment siły

$$M = Fr \sin(\alpha) [Nm]$$

F - siła $\left[N = \frac{kg \cdot m}{s^2}\right]$

r - ramie $[m]$

$\sin(\alpha)$ - sinus kąta pomiędzy wektorem siły i ramienia

Pęd

$$P = Ft = m\Delta v \left[Ns = \frac{kg \cdot m}{s}\right]$$

F - siła $\left[N = \frac{kg \cdot m}{s^2}\right]$

t - czas $[s]$

m - masa $[kg]$

v - prędkość $\left[\frac{m}{s}\right]$

Przedrostki

Przedrostki												
mnożnik	10^{12}	10^9	10^6	10^3	10^2	10^1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}
przedrostek	tera	giga	mega	kilo	hekto	deka	decy	centy	mili	mikro	nano	piko
oznaczenie	T	G	M	k	h	da	d	c	m	μ	n	p

Warto zapamiętać

Gęstość wody

$$\rho_w = 10^3 \left[\frac{kg}{m^3}\right]$$

Ciężar właściwy wody

$$\gamma_w = 10^4 \left[\frac{N}{m^3}\right]$$

Przyspieszenie ziemskie

$$g \approx 9,81 \left[\frac{m}{s^2}\right] \approx 10 \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

Litr

$$l = 1 [dm^3] = 10^{-3} [m^3]$$

Całki podstawowe

$$\int dx = x + C$$

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

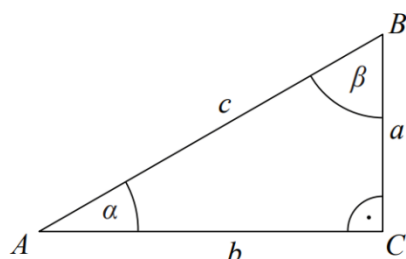
$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) + \int g(x)$$

$$\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) - \int g(x)$$

$$\int a f(x) dx = a \int f(x)$$

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Funkcje trygonometryczne



$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\sin \beta = \frac{b}{c}$$

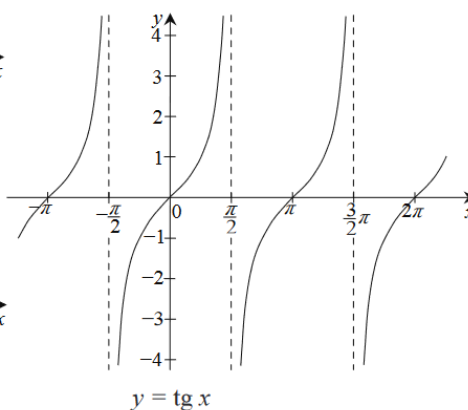
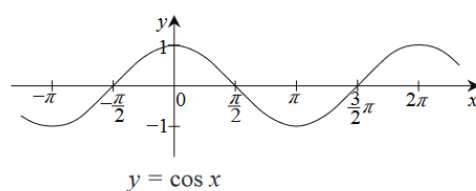
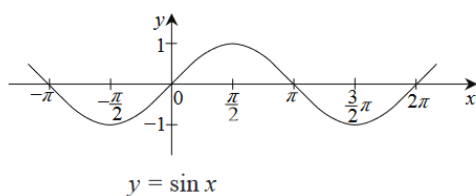
$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\cos \beta = \frac{a}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}$$

α	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje



Napór – ściana pozioma

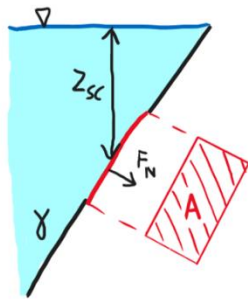
$$F_{N_z} = \gamma V [N]$$

gdzie: γ - ciężar właściwy,

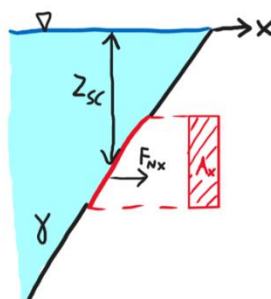
V - objętość cieczy nad badaną powierzchnią.

Napór – ściana dowolnie zorientowana

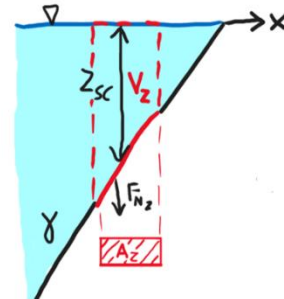
$$F_N = \gamma z_{sc} A$$



$$F_{N_x} = \gamma z_{sc} A_x$$



$$F_{N_z} = \gamma z_{sc} A_z = \gamma V$$



z_{sc} - głębokość środka ciężkości
 A - pole powierzchni ściany

A_x - pole powierzchni ściany w osi X

A_z - pole powierzchni ściany w osi Z

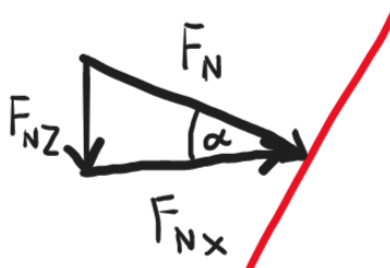
$$F_N = \sqrt{F_{N_z}^2 + F_{N_x}^2} [N]$$

gdzie: F_{N_z} - składowa pionowa siły naporu,

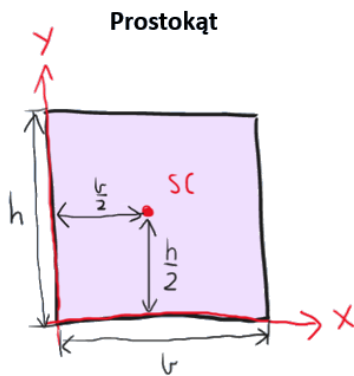
F_{N_x} - składowa pozioma siły naporu.

$$\alpha = \arctan \left(\frac{F_{N_z}}{F_{N_x}} \right) [^\circ]$$

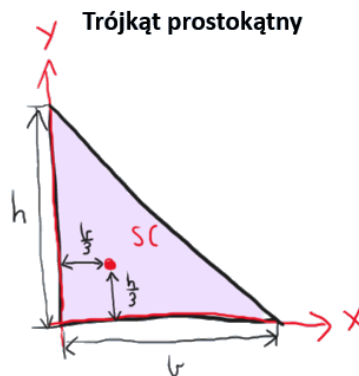
gdzie: α - kąt nachylenia siły naporu.



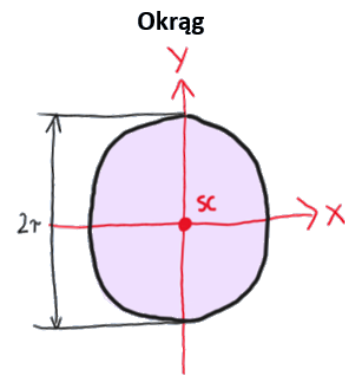
Moment bezwładności i środek ciężkości podstawowych figur



$$I_x = \frac{bh^3}{12} \quad I_y = \frac{b^3h}{12}$$



$$I_x = \frac{bh^3}{36} \quad I_y = \frac{b^3h}{36}$$



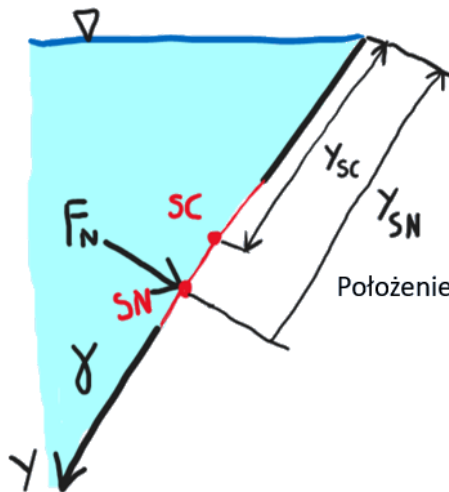
$$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{4}$$

gdzie: SC - środek ciężkości,

I_x, I_y - moment bezwładności względem wskazanej osi,

A - pole powierzchni figury.

Środek naporu

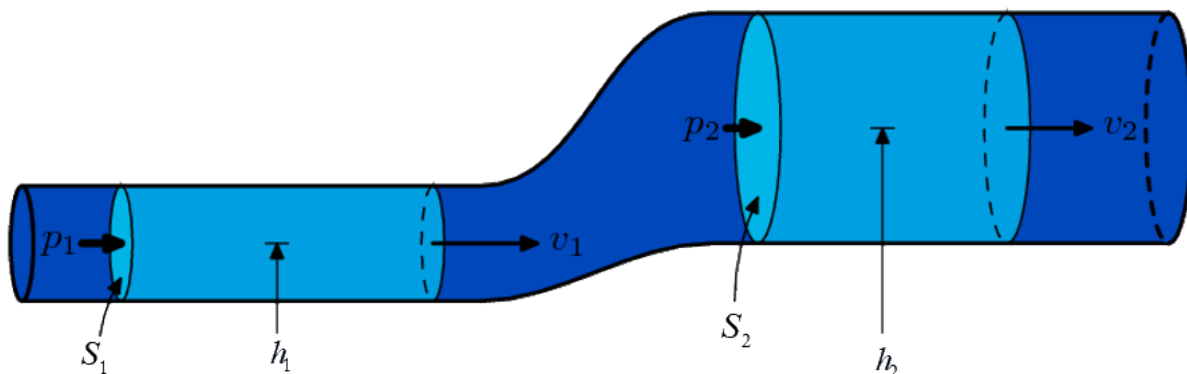


Położenie środka naporu: $y_{sn} = y_{sc} + \frac{I_0}{Ay_{sc}}$

gdzie: I_0 - moment bezwładności
(względem osi prostopadłej do pola powierzchni i przechodzącej przez środek ciężkości)

SC - środek ciężkości

SN - środek naporu



Równanie ciągłości strugi

$$Q = S_1 v_1 = S_2 v_2 = \text{const} \left[\frac{m^3}{s} \right]$$

gdzie: Q - strumień objętości,

S - pole przekroju poprzecznego strugi,

v - prędkość strugi w danym przekroju.

Równanie Bernoulliego – ciecz idealna

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gh_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gh_2 = \text{const} \left[\frac{J}{kg} \right]$$

$$\underline{p_1} + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho gh_1 = \underline{p_2} + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho gh_2 = \text{const} [Pa]$$

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + \underline{h_1} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + \underline{h_2} = \text{const} [m]$$

gdzie: p - ciśnienie,

ρ - gęstość płynu,

v - prędkość strugi,

g - przyspieszenie ziemskie,

h - wysokość średnia strugi.

Równanie Bernoulliego – ze stratami

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + h_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_2 + \underline{h_s} = \text{const} [m]$$

gdzie: p - ciśnienie,
 ρ - gęstość płynu,
 v - prędkość strugi,
 g - przyspieszenie ziemskie,
 h - wysokość średnia strugi,
 h_s - wysokość strat (suma wszystkich strat po drodze).

Rodzaje strat

$$h_s = h_{s(m)} + h_{s(l)} [m]$$

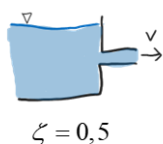
gdzie: $h_{s(m)}$ - miejscowe (zależne od kształtu np. przewężenia),
 $h_{s(l)}$ - liniowe (zależne od długości przewodu, jego wielkości i rodzaju przepływu).

Straty miejscowe

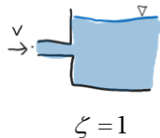
$$h_{s(m)} = \left(\frac{v^2}{2g} \right) \cdot \zeta [m]$$

gdzie: ζ - współczynnik strat lokalnych.

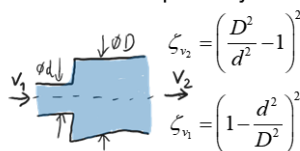
Wypływ ze zbiornika



Dopływ do zbiornika



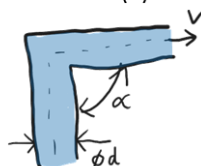
Rozszerzenie przekroju



Zwężenie przekroju

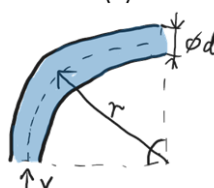
$\frac{d^2}{D^2}$	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8
ζ	0,45	0,4	0,3	0,2	0,1

Kolanko (1)



α	90°	120°	135°	150°
ζ	1,1	0,55	0,35	0,1

Kolanko (2)



$\frac{r}{d}$	1	2	3	4	5
ζ	0,29	0,22	0,15	0,12	0,1

Straty liniowe

$$h_{s(m)} = \left(\frac{v^2}{2g} \right) \cdot \lambda \frac{l}{d} [m]$$

gdzie: l - długość przewodu,
 d - średnica przewodu,
 λ - współczynnik strat liniowych.

Współczynnik strat liniowych

a) przepływ laminarny

$$\lambda_l = \frac{64}{Re}$$

b) przepływ turbulentny

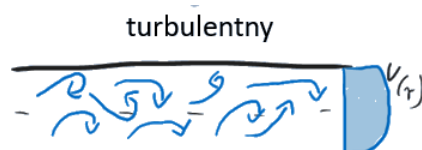
$$\lambda_t = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{Re}} \quad \text{lub} \quad \lambda_t = 0,21 \cdot Re^{-0,21}$$

gdzie: Re - liczba Reynoldsa

Rodzaje przepływów (liczba Reynoldsa, lepkość)



$Re < 2300$



$Re > 2300$

Liczba Reynoldsa $Re = \frac{\rho \cdot v_{sr} \cdot d}{\mu} = \frac{v_{sr} \cdot d}{\nu}$	ρ - gęstość płynu	lepkość dynamiczna $\mu = \nu \rho [Pa \cdot s]$:
	v_{sr} - prędkość średnia	
	d - średnica przewodu	
	μ - lepkość dynamiczna	
	ν - lepkość kinematyczna	

woda	- 0,001	= 10^{-3}
miód	- 10	= 10^1
smoła	- 10000000	= 10^7



Równanie równowagi

a) dla układu kartezjańskiego

$$dp = \rho \cdot (X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz)$$

b) dla układu cylindrycznego

$$dp = \rho \cdot (R \cdot dr + \Phi \cdot r \cdot d\varphi + Z \cdot dz)$$

c) dla powierzchni ekwipotencjalnej

$$0 = \rho \cdot (X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz)$$

lub

$$0 = \rho \cdot (R \cdot dr + \Phi \cdot r \cdot d\varphi + Z \cdot dz)$$

gdzie: dp - zmiana ciśnienia,
 ρ - gęstość,
 X, Y, Z, R, Φ - jednostkowe siły masowe (np. siła odśrodkowa: $a_{od} = \omega^2 r$)
 $dx, dr...$ - zmienna (po której będziemy całkować).

Równanie manometryczne

$$p_h = \rho \cdot g \cdot h + p_a$$

gdzie: p_h - ciśnienie na głębokości h ,
 ρ - gęstość,
 g - przyspieszenie ziemskie,
 h - głębokość,
 p_a - ciśnienie atmosferyczne.

Prędkość obrotowa

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{n \cdot \pi}{30} \left[\frac{rad}{s} \right], \quad n = \frac{\omega \cdot 30}{\pi} \left[\frac{obr}{min} \right]$$



Objęściowe natężenie wypływu (strumień objętości)

$$Q = \int_{z_1}^{z_2} \alpha \cdot v_{(z)} \cdot x_{(z)} \cdot dz \left[\frac{m^3}{s} \right]$$

lub

$$Q = v_{sr} \cdot S = \alpha \cdot v \cdot S \left[\frac{m^3}{s} \right]$$

gdzie: α - współczynnik objęściowego natężenia wypływu, $\alpha \in (0,1)$

$v_{(z)}$ - prędkość wypływu w funkcji wysokości,

$x_{(z)}$ - szerokość otworu w danym miejscu w funkcji wysokości,

dz - wysokość (po niej całkujemy),

z_1, z_2 - granice całkowania,

v_{sr} - prędkość średnia wypływu (w całym przekroju otworu),

S - powierzchnia otworu.

Masowe natężenie wypływu (strumień masy)

$$G = \rho \cdot Q \left[\frac{kg}{s} \right]$$

gdzie: ρ - gęstość,

Q - objęściowe natężenie wypływu.

Czas wypływu cieczy

$$t = - \int_{z_{\max}}^{z_{\min}} \frac{A_{(z)}}{\alpha \cdot A_0 \cdot v_{(z)}} \cdot dz [s]$$

gdzie: α - współczynnik objęściowego natężenia wypływu,

$v_{(z)}$ - prędkość wypływu w funkcji wysokości,

$A_{(z)}$ - powierzchnia cieczy w funkcji wysokości,

A_0 - powierzchnia otworu,

dz - wysokość (po niej całkujemy),

$z_{\max}, z_{\min}$ - granice całkowania.



Reakcja hydrodynamiczna

$$R = \rho Q (v_p - v_k) [N]$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

gdzie: ρ - gęstość cieczy,

Q - objętościowe natężenie przepływu (strumień objętości),

v_p - prędkość początkowa strugi,

v_k - prędkość końcowa strugi,

R_x - reakcja hydrodynamiczna w osi X,

R_y - reakcja hydrodynamiczna w osi Y.