

MECHANIKA - KINEMATYKA

Wzory podstawowe – szkoła średnia

Kinematyka	
prędkość	$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$
przyspieszenie	$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$
prędkość kątowna	$\omega = \frac{\Delta \alpha}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}$
prędkość w ruchu po okręgu	$v = \omega \cdot r$
częstotliwość	$f = \frac{1}{T}$

przyspieszenie dośrodkowe	$a_d = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r$
przyspieszenie kątowe	$\varepsilon = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$
przyspieszenie styczne	$a_{st} = \varepsilon \cdot r$
prędkość w prostoliniowym ruchu jednostajnie zmiennym	$v = v_0 + a \cdot t$
droga w prostoliniowym ruchu jednostajnie zmiennym	$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$

Przyspieszenie ziemskie $g \approx 9,81 \left[\frac{m}{s^2} \right] \approx 10 \left[\frac{m}{s^2} \right]$

Pochodne podstawowe

funkcja	pochodna funkcji
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^r$	$f'(x) = r \cdot x^{r-1}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$

$$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x) \quad \text{dla } c \in \mathbb{R}$$

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

$$[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2} \quad \text{gdzie } g(x) \neq 0$$

$$[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Całki podstawowe

$$\int dx = x + C$$

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) + \int g(x)$$

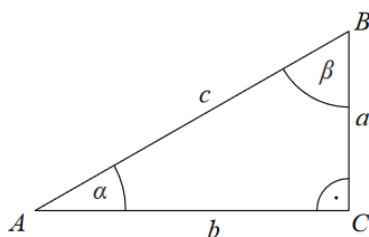
$$\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) - \int g(x)$$

$$\int a f(x) dx = a \int f(x)$$

Przedrostki

Przedrostki												
mnożnik	10^{12}	10^9	10^6	10^3	10^2	10^1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}
przedrostek	tera	giga	mega	kilo	hekto	deka	decy	centy	mili	mikro	nano	piko
oznaczenie	T	G	M	k	h	da	d	c	m	μ	n	p

Funkcje trygonometryczne



$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

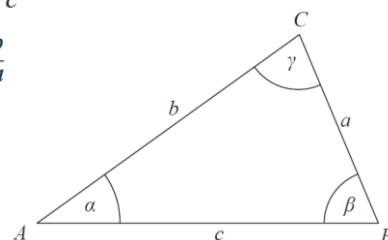
$$\sin \beta = \frac{b}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\cos \beta = \frac{a}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}$$



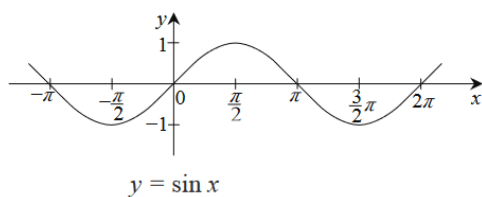
α	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

Twierdzenie Sinusów

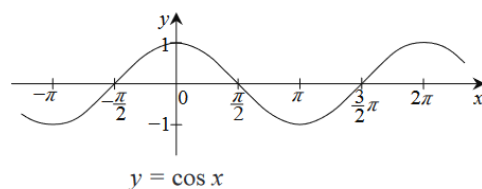
$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Twierdzenie Cosinusów

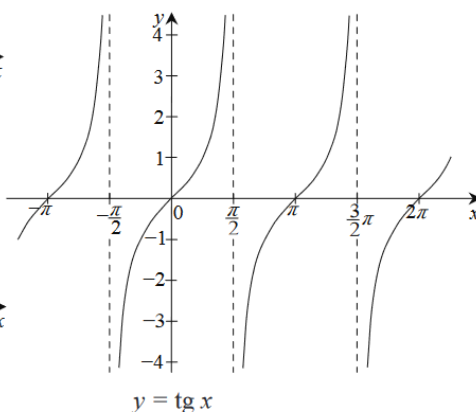
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$$



$$y = \sin x$$



$$y = \cos x$$



$$y = \operatorname{tg} x$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$$



Funkcje trygonometryczne – zależności

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{dla} \quad \alpha \neq \frac{1}{2}\pi + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

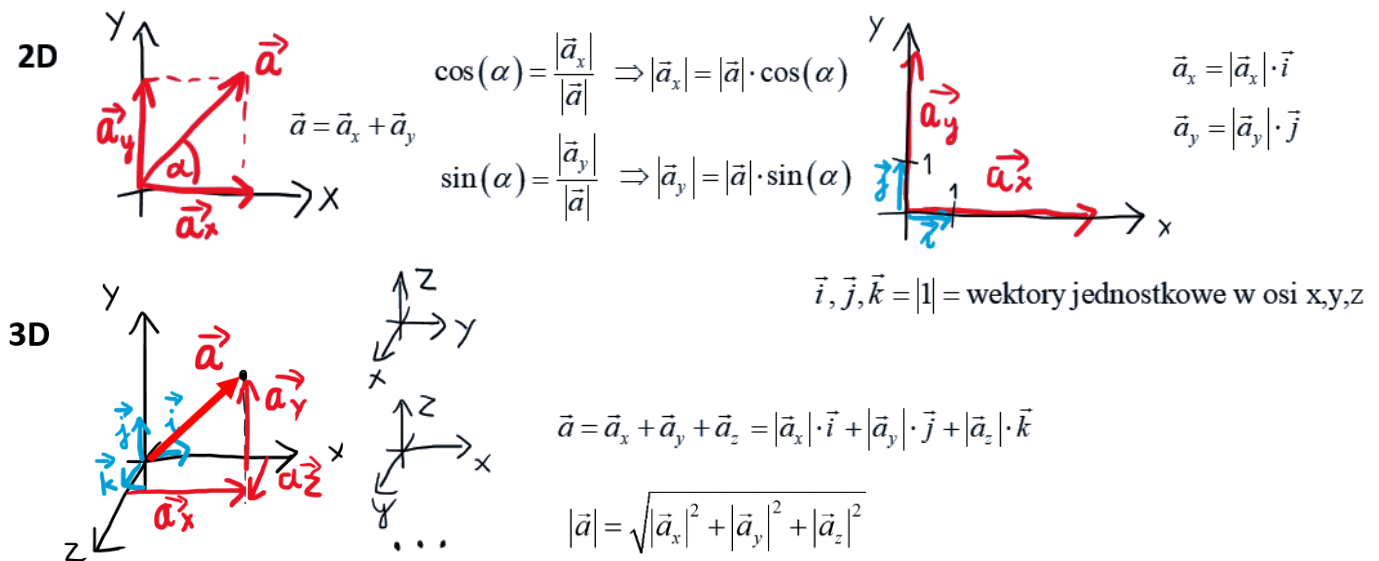
$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$\alpha [^\circ]$	$\sin \alpha$ $\cos \beta$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\beta [^\circ]$
0	0,0000	0,0000	90
1	0,0175	0,0175	89
2	0,0349	0,0349	88
3	0,0523	0,0524	87
4	0,0698	0,0699	86
5	0,0872	0,0875	85
6	0,1045	0,1051	84
7	0,1219	0,1228	83
8	0,1392	0,1405	82
9	0,1564	0,1584	81
10	0,1736	0,1763	80
11	0,1908	0,1944	79
12	0,2079	0,2126	78
13	0,2250	0,2309	77
14	0,2419	0,2493	76
15	0,2588	0,2679	75
16	0,2756	0,2867	74
17	0,2924	0,3057	73
18	0,3090	0,3249	72
19	0,3256	0,3443	71
20	0,3420	0,3640	70
21	0,3584	0,3839	69
22	0,3746	0,4040	68
23	0,3907	0,4245	67
24	0,4067	0,4452	66
25	0,4226	0,4663	65
26	0,4384	0,4877	64
27	0,4540	0,5095	63
28	0,4695	0,5317	62
29	0,4848	0,5543	61
30	0,5000	0,5774	60
31	0,5150	0,6009	59
32	0,5299	0,6249	58
33	0,5446	0,6494	57
34	0,5592	0,6745	56
35	0,5736	0,7002	55
36	0,5878	0,7265	54
37	0,6018	0,7536	53
38	0,6157	0,7813	52
39	0,6293	0,8098	51
40	0,6428	0,8391	50
41	0,6561	0,8693	49
42	0,6691	0,9004	48
43	0,6820	0,9325	47
44	0,6947	0,9657	46
45	0,7071	1,0000	45

$\alpha [^\circ]$	$\sin \alpha$ $\cos \beta$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\beta [^\circ]$
46	0,7193	1,0355	44
47	0,7314	1,0724	43
48	0,7431	1,1106	42
49	0,7547	1,1504	41
50	0,7660	1,1918	40
51	0,7771	1,2349	39
52	0,7880	1,2799	38
53	0,7986	1,3270	37
54	0,8090	1,3764	36
55	0,8192	1,4281	35
56	0,8290	1,4826	34
57	0,8387	1,5399	33
58	0,8480	1,6003	32
59	0,8572	1,6643	31
60	0,8660	1,7321	30
61	0,8746	1,8040	29
62	0,8829	1,8807	28
63	0,8910	1,9626	27
64	0,8988	2,0503	26
65	0,9063	2,1445	25
66	0,9135	2,2460	24
67	0,9205	2,3559	23
68	0,9272	2,4751	22
69	0,9336	2,6051	21
70	0,9397	2,7475	20
71	0,9455	2,9042	19
72	0,9511	3,0777	18
73	0,9563	3,2709	17
74	0,9613	3,4874	16
75	0,9659	3,7321	15
76	0,9703	4,0108	14
77	0,9744	4,3315	13
78	0,9781	4,7046	12
79	0,9816	5,1446	11
80	0,9848	5,6713	10
81	0,9877	6,3138	9
82	0,9903	7,1154	8
83	0,9925	8,1443	7
84	0,9945	9,5144	6
85	0,9962	11,4301	5
86	0,9976	14,3007	4
87	0,9986	19,0811	3
88	0,9994	28,6363	2
89	0,9998	57,2900	1
90	1,0000	—	0

Wektory – przedstawienie analityczne



Wektory – dodawanie i odejmowanie

$$\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = (|\vec{a}_x| + |\vec{b}_x| - |\vec{c}_x|) \cdot \vec{i} + (|\vec{a}_y| + |\vec{b}_y| - |\vec{c}_y|) \cdot \vec{j} + (|\vec{a}_z| + |\vec{b}_z| - |\vec{c}_z|) \cdot \vec{k}$$

Wektory – mnożenie przez skalar

$$2\vec{a} = 2(|\vec{a}_x| \cdot \vec{i} + |\vec{a}_y| \cdot \vec{j}) = 2|\vec{a}_x| \cdot \vec{i} + 2|\vec{a}_y| \cdot \vec{j}$$

Wektory – iloczyn skalarny

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$$

$$\vec{a} \circ \vec{b} = (|\vec{a}_x| \cdot \vec{i} + |\vec{a}_y| \cdot \vec{j}) \circ (|\vec{b}_x| \cdot \vec{i} + |\vec{b}_y| \cdot \vec{j}) = |\vec{a}_x| \cdot |\vec{b}_x| + |\vec{a}_y| \cdot |\vec{b}_y|$$

Wektory – iloczyn wektorowy

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\alpha)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ |\vec{a}_x| & |\vec{a}_y| & |\vec{a}_z| \\ |\vec{b}_x| & |\vec{b}_y| & |\vec{b}_z| \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ |\vec{a}_x| & |\vec{a}_y| & |\vec{a}_z| \\ |\vec{b}_x| & |\vec{b}_y| & |\vec{b}_z| \end{vmatrix}$$

$$= i(|\vec{a}_y| \cdot |\vec{b}_z| - |\vec{a}_z| \cdot |\vec{b}_y|) + j(|\vec{a}_z| \cdot |\vec{b}_x| - |\vec{a}_x| \cdot |\vec{b}_z|) + k(|\vec{a}_x| \cdot |\vec{b}_y| - |\vec{a}_y| \cdot |\vec{b}_x|) = \vec{c}$$

Prędkość, przyspieszenie, położenie – punkt materialny

Zależności

pochodna

całka

$$\begin{aligned}
 r(t) &= \int v(t) dt \\
 \text{położenie} &\quad \updownarrow \\
 \frac{dr(t)}{dt} &= v(t) = \int a_{st}(t) dt \\
 \text{prędkość} &\quad \updownarrow \\
 \frac{dv(t)}{dt} &= a_{st}(t) \\
 \text{przyspieszenie} &\quad \updownarrow \\
 &\quad \text{styczne}
 \end{aligned}$$

Położenie (prawo ruchu) $\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k} [m]$

Tor ruchu $\longrightarrow$ Prawo ruchu po usunięciu parametru t
(równanie toru) np. $x + 2y = 1$

Prędkość

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + \dots} \quad v_x = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x} \left[\frac{m}{s} \right]$$

Przyspieszenie

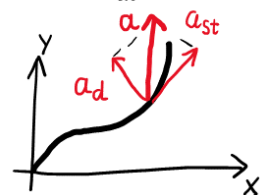
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{a_{st}^2 + a_d^2} \quad a_x = \frac{dv_x(t)}{dt} = \dot{v}_x = \ddot{x}$$

styczne

$$a_{st} = \frac{dv(t)}{dt} = \dot{v} = \dot{v} \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

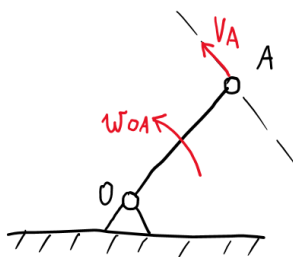
dośrodkowe

$$a_d = \frac{v^2}{\rho} \left[\frac{m}{s^2} \right]$$



Prędkość – ciało sztywne

Stały punkt obrotu



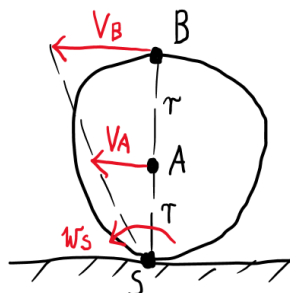
$$v_A = \omega_{OA} \cdot |OA|$$

$$\vec{v}_A \perp \vec{OA}$$

v - prędkość liniowa

ω - prędkość obrotowa

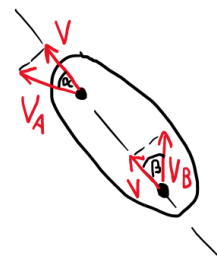
Chwilowy punkt obrotu



$$v_A = \omega_S \cdot r \Rightarrow \omega_S = \frac{v_A}{r}$$

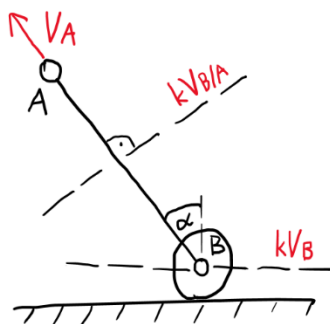
$$v_B = \omega_S \cdot 2r = \frac{v_A}{r} \cdot 2r = 2v_A$$

„sprytnie twierdzenie”



$$v = v_A \cdot \cos(\alpha) = v_B \cdot \cos(\beta)$$

Równanie wektorowe

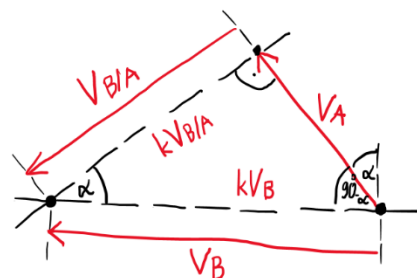


$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$$

prędkość B względem A

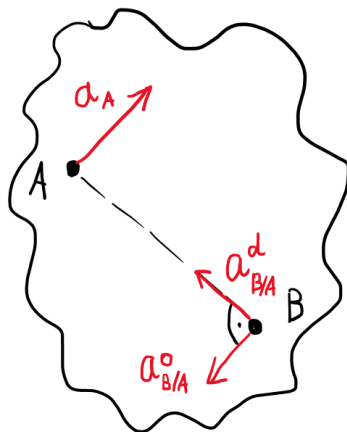
$$v_{B/A} = \omega_{AB} \cdot |AB|$$

$$\vec{v}_{B/A} \perp \vec{BA}$$



$$\sin(\alpha) = \frac{v_A}{v_B} \Rightarrow v_B = \frac{v_A}{\sin(\alpha)}$$

Przyspieszenie – ciało sztywne



ω - prędkość obrotowa
 ε - przyspieszenie obrotowe

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + (\vec{a}_{B/A}) = \vec{a}_A + (\vec{a}_{B/A}^d + \vec{a}_{B/A}^o)$$

przyspieszenie dośrodkowe
 B względem A

przyspieszenie obrotowe
 B względem A

$$\vec{a}_{B/A}^d \parallel \vec{BA}, \quad \vec{a}_{B/A}^o \perp \vec{BA}$$

$$\begin{cases} a_{B/A}^d = \omega_{BA}^2 \cdot |AB| \\ a_{B/A}^o = \varepsilon_{BA} \cdot |AB|, \quad \varepsilon_{BA} = \frac{d\omega_{BA}}{dt} \end{cases}$$

Prędkość – ruch złożony

ruch unoszenia – ruch układu
 ruchomego $X'Y'$ względem układu
 nieruchomego XY (np. $\vec{v}_u$)

ruch względny – w układzie
 ruchomym $X'Y'$ (np. $\vec{v}_w$)

ruch bezwzględny – w układzie
 nieruchomym XY (np. $\vec{v}$)

$$\vec{v} = \vec{v}_u + \vec{v}_w$$

v_u - prędkość unoszenia

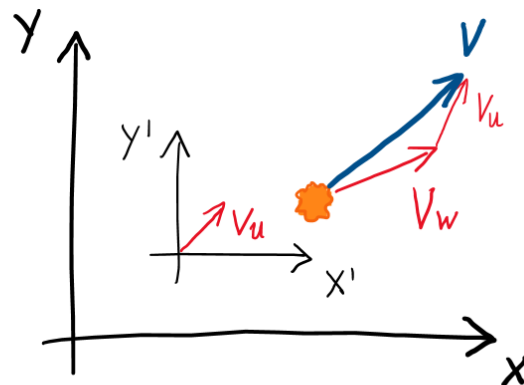
v_w - prędkość względna

dotadowe wzory:

$$v = \omega \cdot r$$

$$\omega = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \varphi'(t) \quad (\text{dla ruchu obrotowego})$$

$\varphi(t)$ - położenie kątowe



Przyspieszenie – ruch złożony

$$\vec{a} = \vec{a}_u + \vec{a}_w + \vec{a}_c$$

a_u - przyspieszenie unoszenia

a_w - przyspieszenie względne

a_c - przyspieszenie Coriolisa

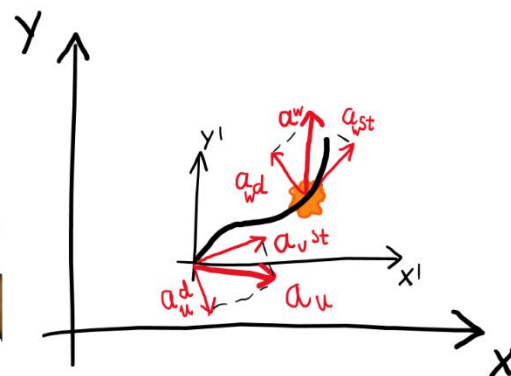
$$a_{st} = a_o = \varepsilon r \quad (\text{styczne/obrotowe})$$

$$a_d = a_n = \omega^2 r \quad (\text{dośrodkowe/normalne})$$

$$a_c = 2 \cdot \omega_u \cdot v_w \cdot \sin(\omega_u, v_w)$$

dotadowe wzory:

$$\varepsilon = \frac{d\omega(t)}{dt} = \omega'(t) \quad (\text{dla ruchu obrotowego})$$



ε - przyspieszenie obrotowe

ω - prędkość obrotowa

v - prędkość liniowa

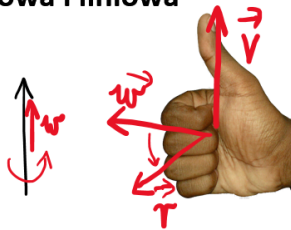
Składanie obrotów

Prędkość obrotowa i liniowa

$$\vec{\omega}_A = \vec{\omega}_B + \vec{\omega}_{AB}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

iloczyn wektorowy

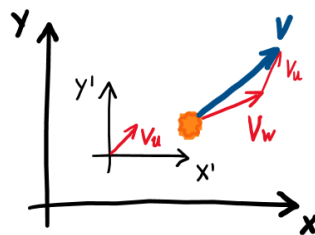


Ruch złożony

$$\vec{v} = \vec{v}_u + \vec{v}_w$$

v_u - prędkość unoszenia

v_w - prędkość względna



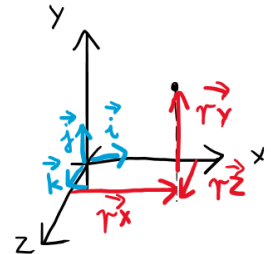
Iloczyn wektorowy

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \quad \left| \quad \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k} \right.$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \quad \left| \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} \right.$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \quad \left| \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \right.$$

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$$



$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} = |\vec{1}|$ = wektory jednostkowe w osi x,y,z

$$\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y + \vec{r}_z = r_x \cdot \vec{i} + r_y \cdot \vec{j} + r_z \cdot \vec{k}$$