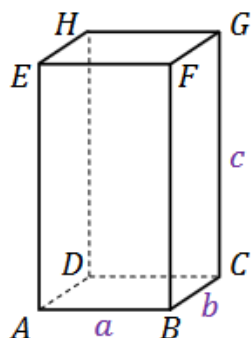
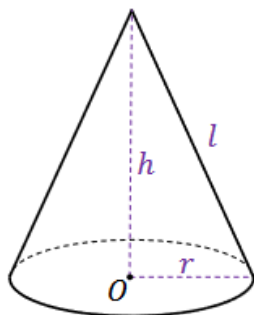


MECHANIKA – DYNAMIKA

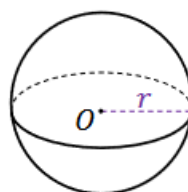
Wzory podstawowe – szkoła średnia



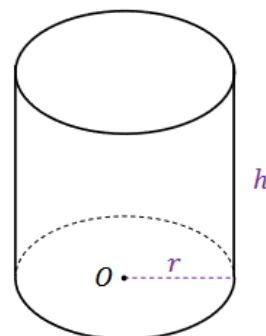
$$V = abc$$



$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$



$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$



$$V = \pi r^2 h$$

Podstawowe wzory

Siła wypadkowa

$$F = m\ddot{x} [N]$$

m - masa $[kg]$

$\ddot{x}$ - przyspieszenie $\left[\frac{m}{s^2}\right]$

Siła grawitacji

$$F_g = mg [N]$$

m - masa $[kg]$

g - przyspieszenie ziemskie $\left[9,81 \frac{m}{s^2}\right]$

Siła tarcia

$$F_t = F_N \cdot f_t [N]$$

F_N - siła nacisku $[N]$

f_t - współczynnik tarcia $[-]$

Gęstość

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\gamma}{g} \left[\frac{kg}{m^3} \right]$$

m - masa $[kg]$

V - objętość $[m^3]$

γ - ciężar właściwy $\left[\frac{N}{m^3}\right]$

g - przyspieszenie ziemskie $\left[9,81 \frac{m}{s^2}\right]$

Gęstość
powierzchniowa (2D)

$$d = \frac{m}{A} = \left[\frac{kg}{m^2} \right]$$

m - masa $[kg]$

A - pole powierzchni $[m^2]$

Pochodne podstawowe

funkcja	pochodna funkcji
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^r$	$f'(x) = r \cdot x^{r-1}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$

$$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x) \quad \text{dla } c \in \mathbb{R}$$

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

$$[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2} \quad \text{gdzie } g(x) \neq 0$$

$$[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Całki podstawowe

$$\int dx = x + C$$

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) + \int g(x)$$

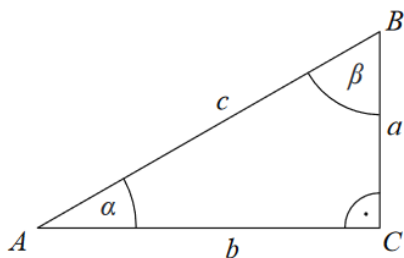
$$\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) - \int g(x)$$

$$\int a f(x) dx = a \int f(x)$$

Przedrostki

Przedrostki												
mnożnik	10^{12}	10^9	10^6	10^3	10^2	10^1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}
przedrostek	tera	giga	mega	kilo	hekto	deka	decy	centy	mili	mikro	nano	piko
oznaczenie	T	G	M	k	h	da	d	c	m	μ	n	p

Funkcje trygonometryczne



$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

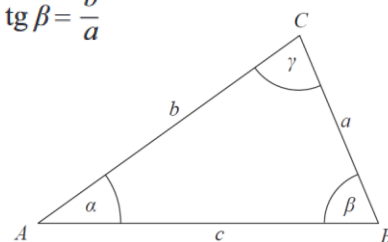
$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\sin \beta = \frac{b}{c}$$

$$\cos \beta = \frac{a}{c}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}$$



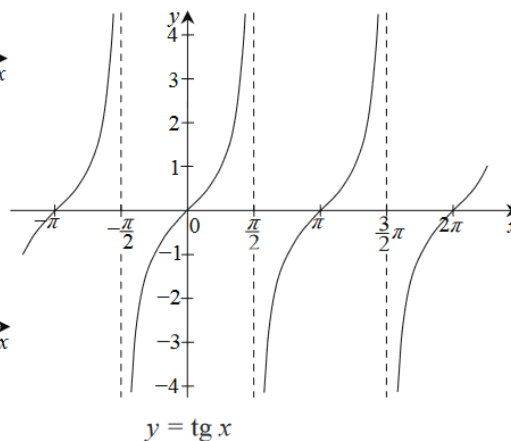
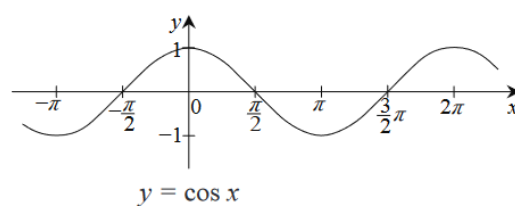
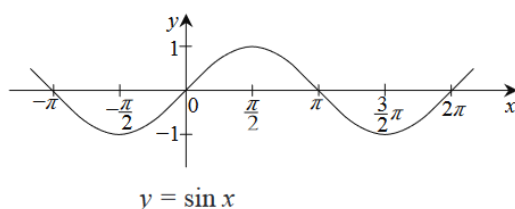
Twierdzenie Sinusów

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Twierdzenie Cosinusów

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$$

α	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje



$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$$



Funkcje trygonometryczne – zależności

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{dla} \quad \alpha \neq \frac{1}{2}\pi + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$\alpha [^\circ]$	$\sin \alpha$ $\cos \beta$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\beta [^\circ]$
0	0,0000	0,0000	90
1	0,0175	0,0175	89
2	0,0349	0,0349	88
3	0,0523	0,0524	87
4	0,0698	0,0699	86
5	0,0872	0,0875	85
6	0,1045	0,1051	84
7	0,1219	0,1228	83
8	0,1392	0,1405	82
9	0,1564	0,1584	81
10	0,1736	0,1763	80
11	0,1908	0,1944	79
12	0,2079	0,2126	78
13	0,2250	0,2309	77
14	0,2419	0,2493	76
15	0,2588	0,2679	75
16	0,2756	0,2867	74
17	0,2924	0,3057	73
18	0,3090	0,3249	72
19	0,3256	0,3443	71
20	0,3420	0,3640	70
21	0,3584	0,3839	69
22	0,3746	0,4040	68
23	0,3907	0,4245	67
24	0,4067	0,4452	66
25	0,4226	0,4663	65
26	0,4384	0,4877	64
27	0,4540	0,5095	63
28	0,4695	0,5317	62
29	0,4848	0,5543	61
30	0,5000	0,5774	60
31	0,5150	0,6009	59
32	0,5299	0,6249	58
33	0,5446	0,6494	57
34	0,5592	0,6745	56
35	0,5736	0,7002	55
36	0,5878	0,7265	54
37	0,6018	0,7536	53
38	0,6157	0,7813	52
39	0,6293	0,8098	51
40	0,6428	0,8391	50
41	0,6561	0,8693	49
42	0,6691	0,9004	48
43	0,6820	0,9325	47
44	0,6947	0,9657	46
45	0,7071	1,0000	45

$\alpha [^\circ]$	$\sin \alpha$ $\cos \beta$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\beta [^\circ]$
46	0,7193	1,0355	44
47	0,7314	1,0724	43
48	0,7431	1,1106	42
49	0,7547	1,1504	41
50	0,7660	1,1918	40
51	0,7771	1,2349	39
52	0,7880	1,2799	38
53	0,7986	1,3270	37
54	0,8090	1,3764	36
55	0,8192	1,4281	35
56	0,8290	1,4826	34
57	0,8387	1,5399	33
58	0,8480	1,6003	32
59	0,8572	1,6643	31
60	0,8660	1,7321	30
61	0,8746	1,8040	29
62	0,8829	1,8807	28
63	0,8910	1,9626	27
64	0,8988	2,0503	26
65	0,9063	2,1445	25
66	0,9135	2,2460	24
67	0,9205	2,3559	23
68	0,9272	2,4751	22
69	0,9336	2,6051	21
70	0,9397	2,7475	20
71	0,9455	2,9042	19
72	0,9511	3,0777	18
73	0,9563	3,2709	17
74	0,9613	3,4874	16
75	0,9659	3,7321	15
76	0,9703	4,0108	14
77	0,9744	4,3315	13
78	0,9781	4,7046	12
79	0,9816	5,1446	11
80	0,9848	5,6713	10
81	0,9877	6,3138	9
82	0,9903	7,1154	8
83	0,9925	8,1443	7
84	0,9945	9,5144	6
85	0,9962	11,4301	5
86	0,9976	14,3007	4
87	0,9986	19,0811	3
88	0,9994	28,6363	2
89	0,9998	57,2900	1
90	1,0000	—	0

Środek ciężkości: punkt, w którym jest przyłożony wektor wypadkowej siły ciężkości.

Dla ciał jednorodnych: środek ciężkości = środek masy/pola

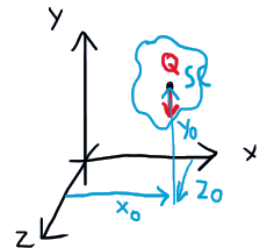
w 3D:
 (x_0, y_0, z_0)
 m - masa

$$x_0 = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{S_{yz}}{\sum m_i}$$

gdzie $S_{yz} = \sum m_i x_i$ to moment statyczny względem płaszczyzny YZ

$$y_0 = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} = \frac{S_{xz}}{\sum m_i}$$

$$z_0 = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i} = \frac{S_{xy}}{\sum m_i}$$



w 2D:

(x_0, y_0)

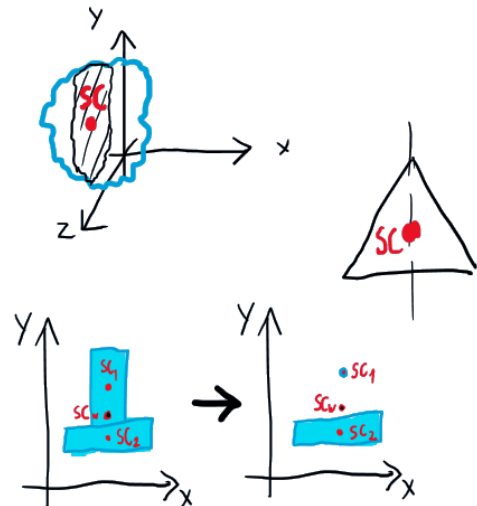
A - pole pow.

$$x_0 = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i}$$

$$y_0 = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i}$$

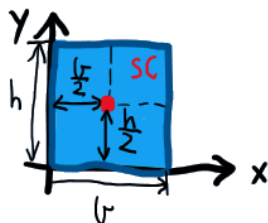
Środek ciężkości – twierdzenia:

1. Jeżeli środek ciężkości danego ciała leży na pewnej płaszczyźnie to moment statyczny jest równy 0.
2. Jeżeli ciało ma płaszczyznę lub oś symetrii to środek ciężkości leży na tym elemencie symetrii.
3. Środek ciężkości całego elementu nie zmienia się jeśli zastąpimy pewną część punktem materialnym o masie odjętej części i umieścimy ten punkt w środku ciężkości odjętej części.

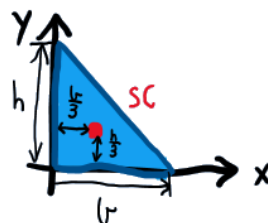


Środki ciężkości – figury 2D

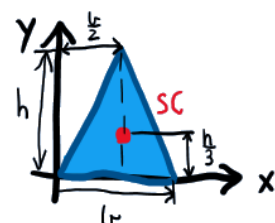
Prostokąt:



Trójkąt prostokątny:



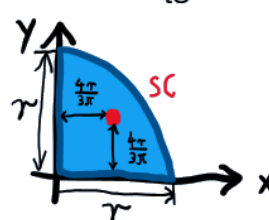
Trójkąt równoramienny:



Koło:

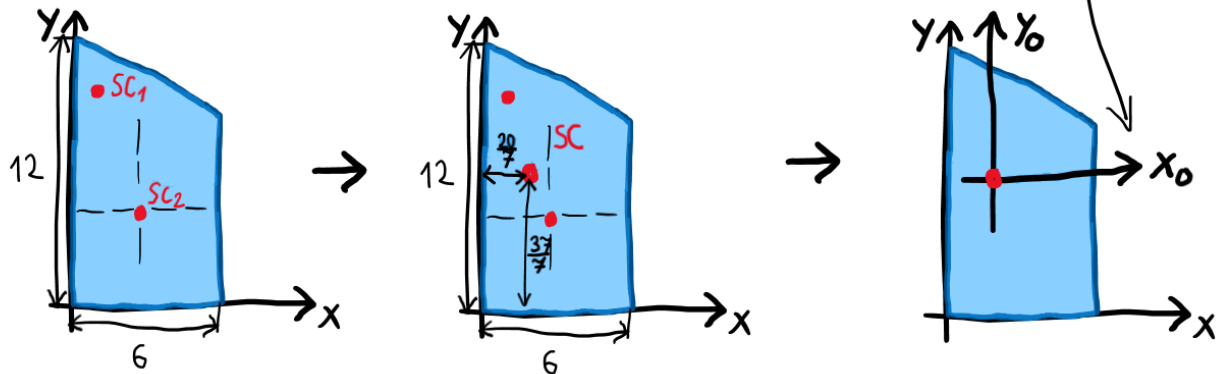


Ćwierćokrąg:



Osie centralne: osie przechodzące przez środek ciężkości.

Przykład z zadania:



Moment bezwładności: określa bezwładność ciała w ruchu obrotowym względem wybranej osi.

Im większy moment bezwładności, tym trudniej obrócić ciało wokół danej osi (potrzeba większej siły)!

a) w **3D** – względem płaszczyzny: $I_{xy} = \sum m_i z_i^2 \text{ [kg} \cdot \text{m}^2 \text{]}$

(x, y, z)

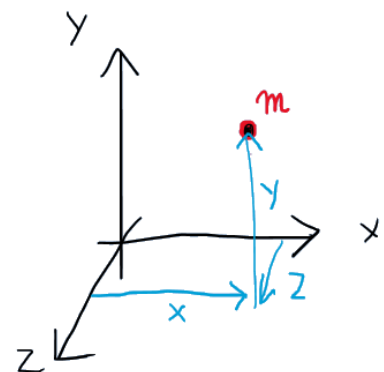
m - masa

$$I_{xz} = \sum m_i y_i^2 \quad I_{yz} = \sum m_i x_i^2$$

b) w **3D** – względem osi:

$$I_x = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) = \sum m_i y_i^2 + \sum m_i z_i^2 = I_{xz} + I_{xy}$$

$$I_y = I_{yz} + I_{xy} \quad I_z = I_{xz} + I_{yz}$$



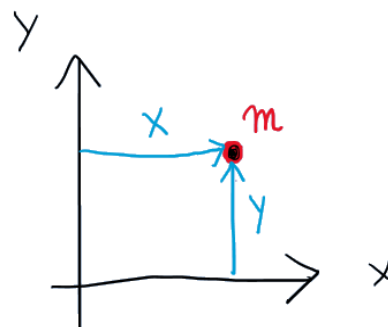
c) w **2D** – dla punktów:

(x, y)

m - masa

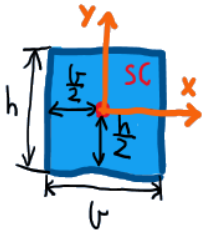
$$I_x = \sum m_i y_i^2$$

$$I_y = \sum m_i x_i^2$$



Momenty bezwładności (masowe) – figury 2D

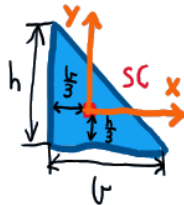
Prostokąt:



$$I_x = \frac{m \cdot h^2}{12}$$

$$I_y = \frac{m \cdot b^2}{12}$$

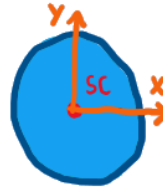
Trójkąt prostokątny:



$$I_x = \frac{m \cdot h^2}{18}$$

$$I_y = \frac{m \cdot b^2}{18}$$

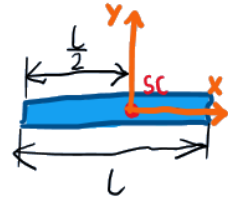
Koło i półkoło:



$$I_x = \frac{m \cdot r^2}{4}$$

$$I_y = \frac{m \cdot r^2}{4}$$

Pręt:

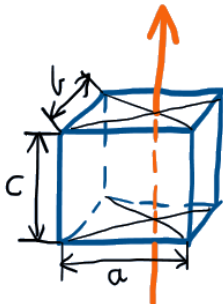


$$I_x = 0$$

$$I_y = \frac{m \cdot l^2}{12}$$

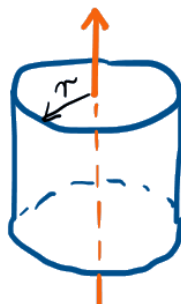
Momenty bezwładności (masowe) – figury 3D

Prostopadłościan:



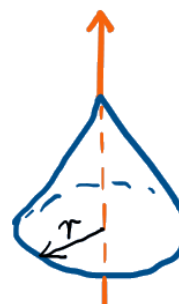
$$I = \frac{m(a^2 + b^2)}{12}$$

Walec:



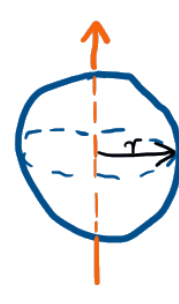
$$I = \frac{m \cdot r^2}{2}$$

Stożek:



$$I = \frac{3 \cdot m \cdot r^2}{10}$$

Kula:



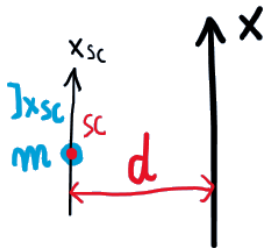
$$I = \frac{2 \cdot m \cdot r^2}{5}$$

Twierdzenie Steinera

Obliczanie masowych momentów bezwładności względem osi innej niż przechodzącej przez środek ciężkości

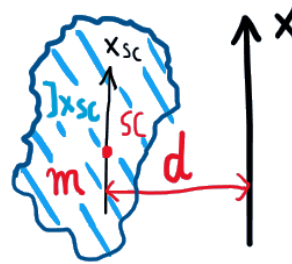
dla układu mas

$$I_x = I_{x_{sc}} + md^2 [kg \cdot m^2]$$



dla figur płaskich

$$I_x = I_{x_{sc}} + md^2 [kg \cdot m^2]$$



Kinematyka punktu

Zależności

pochodna

całka

$$\begin{aligned} r(t) &= \int v(t) dt \\ \frac{dr(t)}{dt} &= v(t) = \int a_{st}(t) dt \\ \frac{dv(t)}{dt} &= a_{st}(t) \end{aligned}$$

położenie

prędkość

przyspieszenie styczne

Położenie (prawo ruchu) $\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k} [m]$

Tor ruchu $\longrightarrow$ Prawo ruchu po usunięciu parametru t
(równanie toru) np. $x + 2y = 1$

Prędkość $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + \dots}$ $v_x = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x} \left[\frac{m}{s} \right]$

Przyspieszenie $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{a_{st}^2 + a_d^2}$ $a_x = \frac{dv_x(t)}{dt} = \dot{v}_x = \ddot{x}$

Siła wypadkowa $\sum F = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots = \vec{F}_w = m \cdot \ddot{x}$

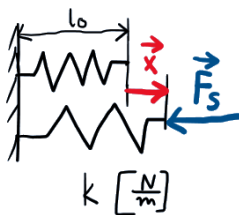
Drgania

Siła wypadkowa w ruchu liniowym $\sum F = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots = \vec{F}_w = m \cdot a = m \cdot \ddot{x}$

Siła wypadkowa w ruchu obrotowym $\sum M = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \dots = \vec{M}_w = I \cdot \varepsilon = I \cdot \ddot{\phi}$

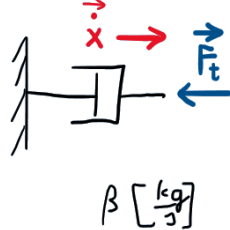
Siła sprężystości

$$\vec{F}_s = -k \cdot \vec{x}$$

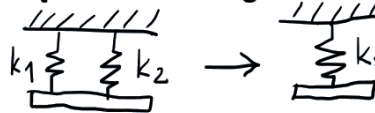


Siła tłumienia

$$\vec{F}_T = -\beta \cdot \vec{v} = -\beta \cdot \dot{\vec{x}}$$



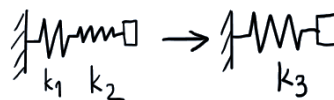
Łączenie równoległe



$$k_3 = k_1 + k_2$$

$$\beta_3 = \beta_1 + \beta_2$$

Łączenie szeregowe



$$\frac{1}{k_3} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

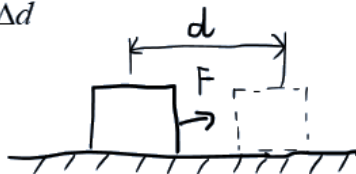
$$\frac{1}{\beta_3} = \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2}$$

Zasady zachowania

Zasada zachowania energii $\Delta E = E_{końcowa} - E_{początkowa} = W_{\text{sił zewnętrznych}} = -W_{\text{sił wewnętrznych}} [J]$

Rodzaje energii $\sum E = (E_{\text{kinetyczna}}) + (E_{\text{potencjalna}}) = (E_{\text{kin/post}} + E_{\text{kin/obrot}}) + (E_{\text{pot/wys}} + E_{\text{pot/spr}}) =$

Praca $W = F \cdot \Delta d$



$$= \left(\frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} \right) + \left(mgh + \frac{kx^2}{2} \right)$$



Zasada zachowania pędu $\Delta p = m\Delta v = F_{\text{const}} \Delta t = \int_{t_1}^{t_2} F(t) dt$

Tarcie ślizgowe $F_T = F_N \cdot \mu_s$ $\mu_s [-]$ **Tarcie toczne** $F_T = F_N \cdot \frac{\mu_T}{r}$ $\mu_T [m]$