सीमा पाठ्यक्रम

पाठ 8

फलनों की एकतरफ़ा सीमाएँ।

फलन की सततता।

गृहकार्य

भाग 1: टेस्ट

सही उत्तर चुनें (केवल एक सही है)।

प्रश्न 1

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -2$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = -2$

इन दोनों बराबरियों से क्या निष्कर्ष निकाला जा सकता है?

a) कि x=1 पर फलन की सीमा अस्तित्व में नहीं है

b) कि $f(x) = -2$

c) कि $\lim_{x \to 1} f(x) = -2$

d) कि $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$

प्रश्न 2

$\lim_{x \to 0^-} f(x)$

उपर्युक्त लेखन से क्या जानकारी मिलती है?

a) कि फलन के मान नकारात्मक हैं

b) कि फलन के मान शून्य की ओर बाईं ओर से बढ़ रहे हैं

c) कि फलन की सीमा शून्य की ओर जाती है

d) कि फलन के तर्क x नकारात्मक हैं

प्रश्न 3

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}$$

इस सीमा की सही गणना कैसे करें?

a) पहले एकतरफ़ा सीमाएँ निकालें

b) x=1 रखने पर $\left[\frac{A}{0}\right]=\pm\infty$ रूप से मान पढ़ें

c) यह असंभव है

d) गुणनखंडन विधि लागू करें

प्रश्न 4

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{|2-x|}{2-x}$$

इस सीमा की गणना कैसे करें?

a) $\lim_{x\to 2^-}\frac{|2-x|}{2-x}=\lim_{x\to 2^-}\frac{2-x}{2-x}=1$

b) $\lim_{x\to 2^-}\frac{|2-x|}{2-x}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-(2-x)}{2-x}=-1$

c) $\lim_{x\to 2^-}\frac{|2-x|}{2-x}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x-2}{2-x}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x-2}{-(x-2)}-1$

d) यह सीमा अस्तित्व में नहीं है

प्रश्न 5

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

यह सीमा किस मान की ओर जाती है?

a) $+\infty$

b) $-\infty$

c) 0

d) 1

प्रश्न 6

$$f(x)=\begin{cases}4x-1, & x>1\\ 5x-2, & x\le 1\end{cases}$$

$f(0)=\ldots?$

a) -1
b) -2
c) 1
d) 0

प्रश्न 7

किसी बिंदु x_0 पर फलन के सतत होने के लिये पर्याप्त है कि ...

a) उस बिंदु पर बाएँ तथा दाएँ पार्श्व की सीमाएँ समान हों
b) उस बिंदु पर दोनों एकतरफ़ा सीमाएँ परिभाषित हों और फलन का मान मौजूद हो
c) उस बिंदु पर फलन की सीमा अस्तित्व में हो
d) उस बिंदु पर दोनों एकतरफ़ा सीमाएँ फलन के मान के बराबर हों

प्रश्न 8

कहना कि कोई फलन *सतत* है, इसका अर्थ क्या है?

a) वह अपने सभी असतत बिंदुओं पर भी सतत है
b) उसे बिना पेन उठाए खींचा जा सकता है
c) वह अपने परिभाषा क्षेत्र (डोमेन) के प्रत्येक बिंदु पर सतत है
d) इस कथन का कोई अर्थ नहीं

प्रश्न 9

$$f(x)=\begin{cases} 2, & x\in(-\infty,-1) \\ x^2, & x\in\langle -1,1\rangle \\ e^x, & x\in(1,\infty) \end{cases}$$

फलन की सततता जाँचने के लिये किन बिंदुओं पर परीक्षण आवश्यक है?

a) 0 और 1

b) -1 और 1

c) 2 और e

d) 0 और -1

प्रश्न 10

क्या कोई फलन एक ही समय पर सतत *और* असतत हो सकता है?

a) हाँ

b) नहीं

भाग 2: अभ्यास

अभ्यास 1

निम्न सीमाएँ हल करो:

1) $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{2x}{x+1}$
2) $\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{4x+2}{x+2}$
3) $\lim\limits_{x\to -4^+}\dfrac{x}{|x+4|}$
4) $\lim\limits_{x\to -4^-}\dfrac{x}{|x+4|}$
5) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2x}{2-x}$
6) $\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{2x+5}{25-x^2}$
7) $\lim\limits_{x\to 0^+}3^{\frac{1}{x}}$
8) $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(e^x+\dfrac{1}{x-2}\right)$
9) $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{3x}{e^{\frac{x}{3-x}}+2}$
10) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{(x-4)^2}$

अभ्यास 2

फ़ंक्शन की सततता जाँचें:

1) $f(x)=\begin{cases}-2 & x\le 0\\ \dfrac{x^3-2x}{x^2+1} & x>0\end{cases}$
2) $f(x)=\begin{cases}x+1 & x\le 1\\ \dfrac{x-5}{x-1} & x>1\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{5-x}{25-x^2} & x<5\\ \dfrac{1}{2x} & x\geq 5\end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases}4x+\dfrac{1}{6} & x<0\\ \dfrac{1}{6} & x=0\\ \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x} & x>0\end{cases}$

5) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2}{4-x^2} & x<2\\ x^2 & x=2\\ 4^{\frac{x}{x-2}} & x>2\end{cases}$

6) $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\geq 2\\ 2x & -2<x<2\\ \dfrac{x^2}{2} & x\leq -2\end{cases}$

अभ्यास 3

उन पैरामीटर मानों को निर्धारित करें जिनके लिए फ़ंक्शन सतत है

1) $f(x)=\begin{cases}2x-a & x\leq 2\\ 2x^2+1 & x>2\end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases}2x+1 & x<1\\ x^2-ax & x\geq 1\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases}x & x<-1\ \wedge\ x>1\\ x^2+ax+b & -1\leq x\leq 1\end{cases}$

समाप्त