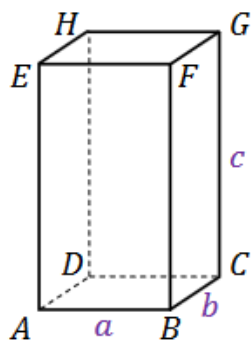
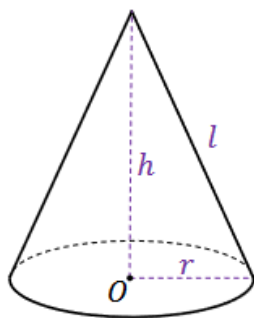


WYTRZYMAŁOŚĆ MATERIAŁÓW - - LINIA UGIĘCIA, WYBOCZENIE, PŁYTY I DYNAMIKA

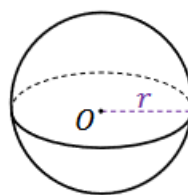
Wzory podstawowe – szkoła średnia



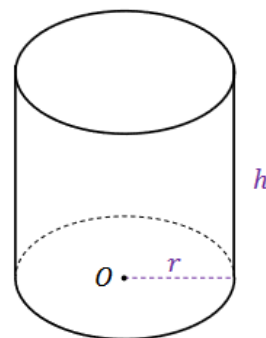
$$V = abc$$



$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$



$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$



$$V = \pi r^2 h$$

Podstawowe wzory

Siła grawitacji

$$F_g = mg [N]$$

m - masa $[kg]$

g - przyspieszenie ziemskie $\left[9,81 \frac{m}{s^2}\right]$

Siła tarcia

$$F_t = F_N \cdot f_t [N]$$

F_N - siła nacisku $[N]$

f_t - współczynnik tarcia $[-]$

Gęstość

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\gamma}{g} \left[\frac{kg}{m^3} \right]$$

m - masa $[kg]$

V - objętość $[m^3]$

γ - ciężar właściwy $\left[\frac{N}{m^3}\right]$

g - przyspieszenie ziemskie $\left[9,81 \frac{m}{s^2}\right]$

Moment siły

$$M = Fr \sin(\alpha) [Nm]$$

F - siła $\left[N = \frac{kg \cdot m}{s^2}\right]$

r - ramię $[m]$

$\sin(\alpha)$ - sinus kąta pomiędzy wektorem siły i ramienia

Przedrostki

Przedrostki												
mnożnik	10^{12}	10^9	10^6	10^3	10^2	10^1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}
przedrostek	tera	giga	mega	kilo	hekto	deka	decy	centy	mili	mikro	nano	piko
oznaczenie	T	G	M	k	h	da	d	c	m	μ	n	p

Pochodne podstawowe

funkcja	pochodna funkcji	
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$	$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$ dla $c \in \mathbb{R}$
$f(x) = x^r$	$f'(x) = r \cdot x^{r-1}$	$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
		$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$ gdy $g(x) \neq 0$
		$[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Całki podstawowe

$$\int dx = x + C$$

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$$

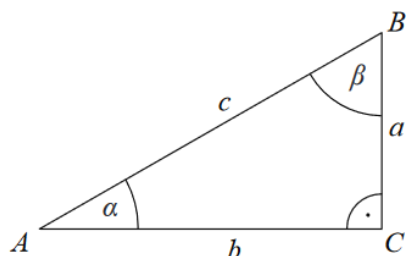
$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) + \int g(x)$$

$$\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) - \int g(x)$$

$$\int af(x) dx = a \int f(x)$$

Funkcje trygonometryczne



$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

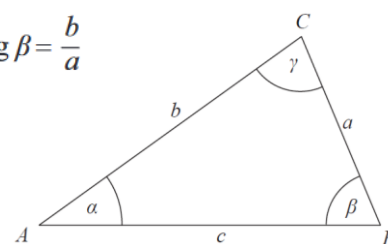
$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\sin \beta = \frac{b}{c}$$

$$\cos \beta = \frac{a}{c}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}$$



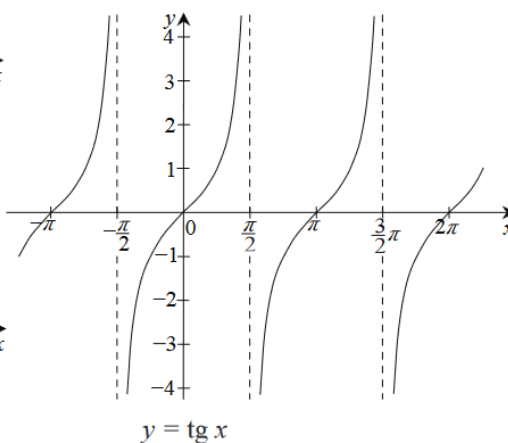
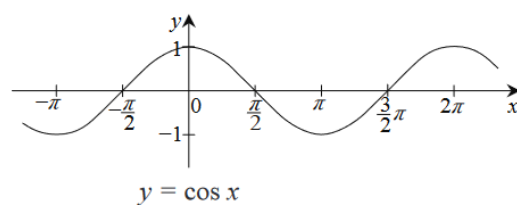
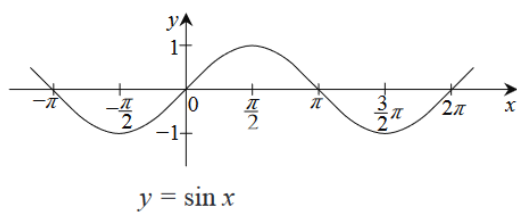
α	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

Twierdzenie Sinusów

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Twierdzenie Cosinusów

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$$



$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$$



Funkcje trygonometryczne – zależności

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{dla} \quad \alpha \neq \frac{1}{2}\pi + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

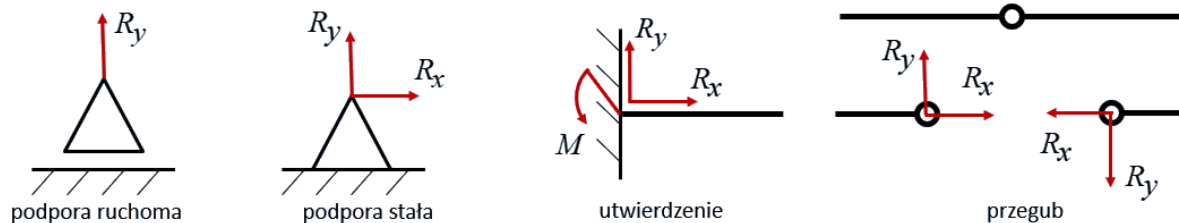
$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$\alpha [^\circ]$	$\sin \alpha$ $\cos \beta$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\beta [^\circ]$
0	0,0000	0,0000	90
1	0,0175	0,0175	89
2	0,0349	0,0349	88
3	0,0523	0,0524	87
4	0,0698	0,0699	86
5	0,0872	0,0875	85
6	0,1045	0,1051	84
7	0,1219	0,1228	83
8	0,1392	0,1405	82
9	0,1564	0,1584	81
10	0,1736	0,1763	80
11	0,1908	0,1944	79
12	0,2079	0,2126	78
13	0,2250	0,2309	77
14	0,2419	0,2493	76
15	0,2588	0,2679	75
16	0,2756	0,2867	74
17	0,2924	0,3057	73
18	0,3090	0,3249	72
19	0,3256	0,3443	71
20	0,3420	0,3640	70
21	0,3584	0,3839	69
22	0,3746	0,4040	68
23	0,3907	0,4245	67
24	0,4067	0,4452	66
25	0,4226	0,4663	65
26	0,4384	0,4877	64
27	0,4540	0,5095	63
28	0,4695	0,5317	62
29	0,4848	0,5543	61
30	0,5000	0,5774	60
31	0,5150	0,6009	59
32	0,5299	0,6249	58
33	0,5446	0,6494	57
34	0,5592	0,6745	56
35	0,5736	0,7002	55
36	0,5878	0,7265	54
37	0,6018	0,7536	53
38	0,6157	0,7813	52
39	0,6293	0,8098	51
40	0,6428	0,8391	50
41	0,6561	0,8693	49
42	0,6691	0,9004	48
43	0,6820	0,9325	47
44	0,6947	0,9657	46
45	0,7071	1,0000	45

$\alpha [^\circ]$	$\sin \alpha$ $\cos \beta$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\beta [^\circ]$
46	0,7193	1,0355	44
47	0,7314	1,0724	43
48	0,7431	1,1106	42
49	0,7547	1,1504	41
50	0,7660	1,1918	40
51	0,7771	1,2349	39
52	0,7880	1,2799	38
53	0,7986	1,3270	37
54	0,8090	1,3764	36
55	0,8192	1,4281	35
56	0,8290	1,4826	34
57	0,8387	1,5399	33
58	0,8480	1,6003	32
59	0,8572	1,6643	31
60	0,8660	1,7321	30
61	0,8746	1,8040	29
62	0,8829	1,8807	28
63	0,8910	1,9626	27
64	0,8988	2,0503	26
65	0,9063	2,1445	25
66	0,9135	2,2460	24
67	0,9205	2,3559	23
68	0,9272	2,4751	22
69	0,9336	2,6051	21
70	0,9397	2,7475	20
71	0,9455	2,9042	19
72	0,9511	3,0777	18
73	0,9563	3,2709	17
74	0,9613	3,4874	16
75	0,9659	3,7321	15
76	0,9703	4,0108	14
77	0,9744	4,3315	13
78	0,9781	4,7046	12
79	0,9816	5,1446	11
80	0,9848	5,6713	10
81	0,9877	6,3138	9
82	0,9903	7,1154	8
83	0,9925	8,1443	7
84	0,9945	9,5144	6
85	0,9962	11,4301	5
86	0,9976	14,3007	4
87	0,9986	19,0811	3
88	0,9994	28,6363	2
89	0,9998	57,2900	1
90	1,0000	—	0

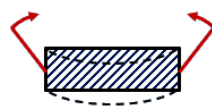
Reakcje w podporach



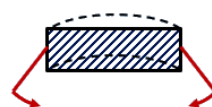
Konwencja znaków

- Moment gnący

$$M_g(x)$$



$$M_g > 0$$



$$M_g < 0$$

Rodzaje obciążeń:

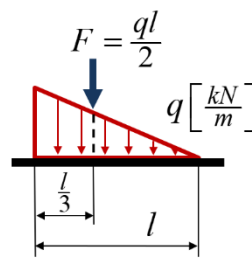
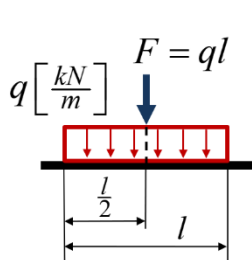
- Siła skupiona



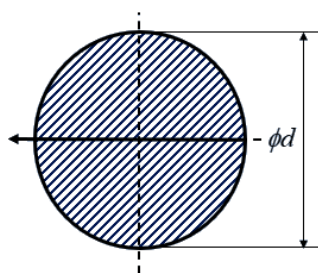
- Moment skupiony



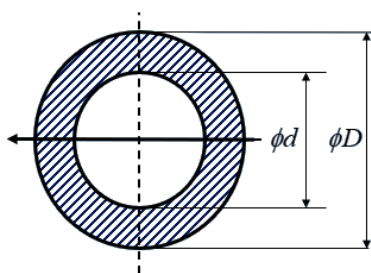
- Obciążenie rozłożone



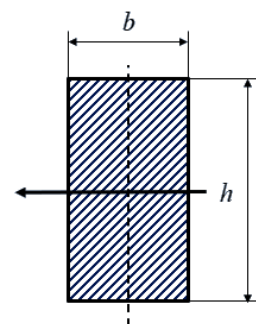
Osiowy moment bezwładności



$$I = \frac{\pi d^4}{64}$$

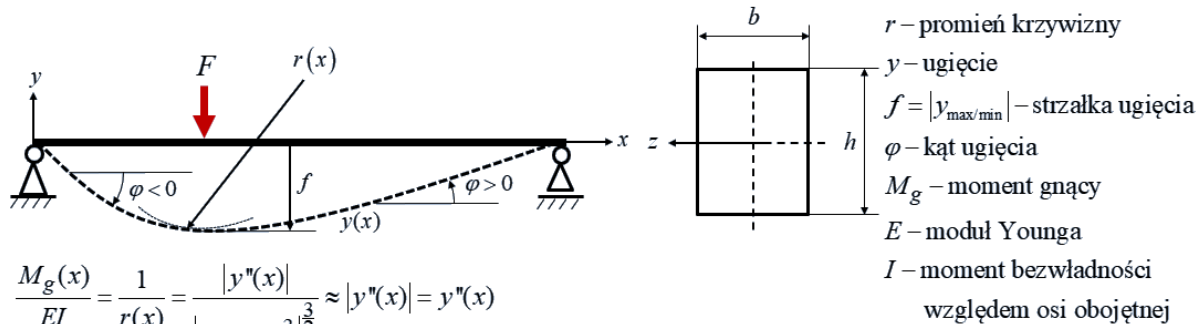


$$I = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{64}$$



$$I = \frac{bh^3}{12}$$

Linia i kąt ugięcia



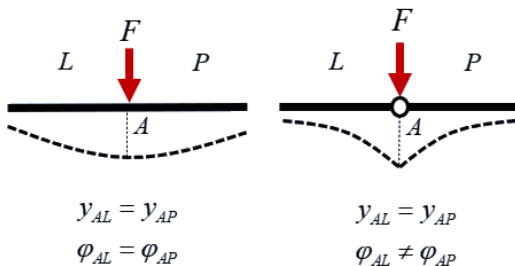
$$\frac{M_g(x)}{EI} = \frac{1}{r(x)} = \frac{|y''(x)|}{|1 + y'(x)^2|^{\frac{3}{2}}} \approx |y''(x)| = y''(x)$$

$$\rightarrow \text{ugięcie: } y(x) = \frac{1}{EI} \iint M_g(x) dx$$

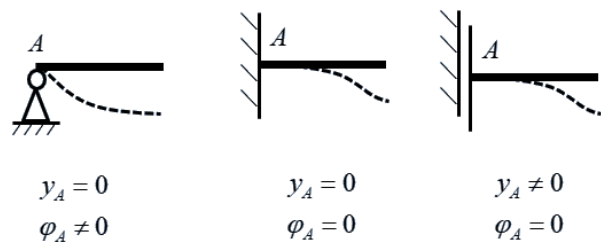
warunek bezpieczeństwa: $f \leq f_{dop}$

$$\rightarrow \text{kąt: } \varphi(x) = y'(x) = \frac{1}{EI} \int M_g(x) dx$$

Łączenie przedziałów



Warunki brzegowe



Metoda Clebscha:

0. Belka nie ma przegubów.

1. Idąc od początku belki (tylko) dodajemy składniki obciążenia w kolejnych przedziałach.

2. Każdy składnik obciążenia ma postać $b(x-a)^c$:

moment gnący: $M_g(x-a)^0$

siła skupiona: $F(x-a)^1$

obciążenie ciągłe: $\frac{q}{2}(x-a)^2$

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

gdzie a to odległość przedziału od początku belki.

3. Całkowanie wykonujemy wykorzystując podstawienie: $t = x - a$.

4. Stałą całkowania dodajemy tylko w pierwszym przedziale.

Metoda superpozycji:

0. Belka nie ma przegubów.

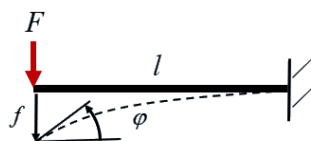
1. Rozdzielamy kilka obciążeń na pojedyncze zgodnie z tabelą;

- jeśli trzeba to zamieniamy obciążenie na alternatywne (jeśli naszego nie ma w tabeli).

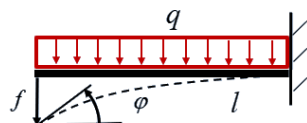
2. Ugięcie i kąt ugięcia liczymy z gotowych wzorów dla każdego przypadku oddzielnie w konkretnym miejscu belki.

3. Finalny wynik to suma z poszczególnych przypadków.

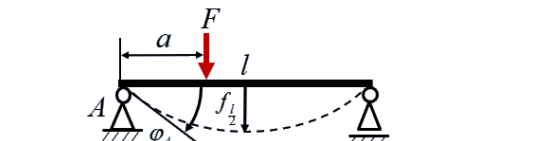
Przypadki proste:



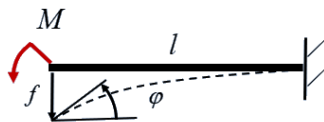
$$f = \frac{Fl^3}{3EI}, \quad \varphi = \frac{Fl^2}{2EI}$$



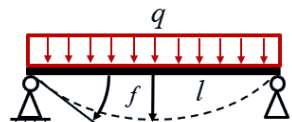
$$f = \frac{ql^4}{8EI}, \quad \varphi = \frac{ql^3}{6EI}$$



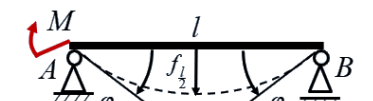
$$f_{l/2} = \frac{Fa}{48EI}(3l^2 - 4a^2) \quad \text{dla } a = \frac{l}{2}: \\ \varphi_A = \frac{Fa}{6EI}(l-a)(2l-a) \quad f = \frac{Fl^3}{48EI}, \quad \varphi_A = \frac{Fl^2}{16EI}$$



$$f = \frac{Ml^2}{2EI}, \quad \varphi = \frac{Ml}{EI}$$



$$f = \frac{5ql^4}{384EI}, \quad \varphi = \frac{ql^3}{24EI}$$



$$f_{l/2} = \frac{Ml^2}{16EI}, \quad \varphi_A = \frac{Ml}{3EI}, \quad \varphi_B = \frac{Ml}{6EI}$$

Ścinanie i rozszerzalność temperaturowa

Napężenie $\sigma = \frac{F_N}{A} [Pa]$

F_N – siła normalna
 A – przekrój poprzeczny

$$1 [MPa] = 10^6 [Pa] = 10^6 \frac{[N]}{[m^2]} = 1 \frac{[N]}{[mm^2]}$$

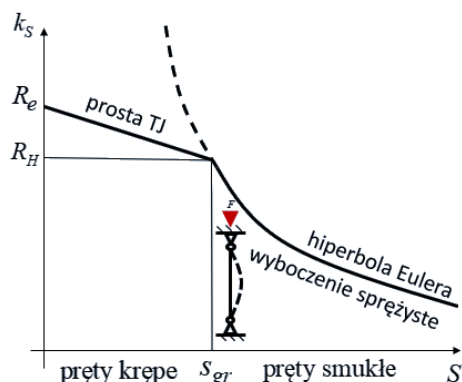
Warunek wytrzymałościowy $\sigma \leq k_s$ – napężenie dopuszczalne (ściskanie)

Wydłużenie $\Delta l = \frac{F_N \cdot l}{A \cdot E}$

Rozszerzalność cieplna $\Delta l = l \cdot \alpha_t \cdot \Delta t$

α_t – współczynnik rozszerzalności cieplnej
 Δt – zmiana temperatury

Wyboczenie - teoria



R_e, R_H – granica plastyczności / proporcjonalności

s, s_{gr} – smukłość / smukłość graniczna

l, l_w – długość / długość wyboczeniowa

i_{min} – minimalny promień bezwładności przekroju

I_{min} – minimalny moment bezwładności przekroju

α – współczynnik mocowania

k_s – wskaźnik wytrzymałości na ściskanie

(napężenie dopuszczalne)

1. Smukłość $s = \frac{l_w}{i_{min}}$, gdzie: $i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}}$, $l_w = \alpha \cdot l$
Smukłość rośnie, gdy pręt jest dłuższy lub „cieńszy”
(ma mniejszy promień bezwładności).

2.1a Pręt krępy według Tetmajera-Jasińskiego ($s < s_{gr}$)

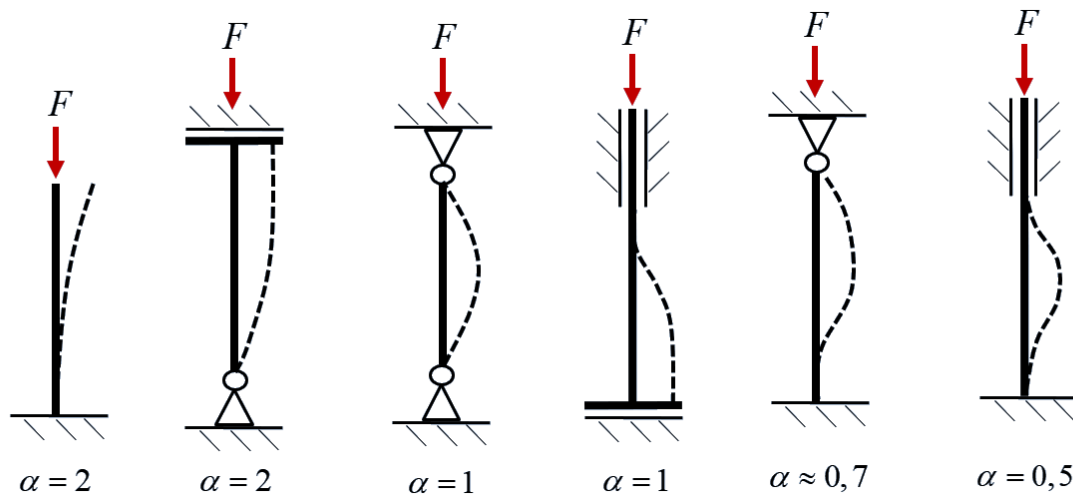
$$s_{gr/TJ} = \pi \sqrt{\frac{E}{R_H}} \quad k_s = R_e - \frac{(R_e - R_H) \cdot s}{s_{gr}}$$

2.1b Pręt krępy według Johnsona-Ostenfelda ($s < s_{gr}$)

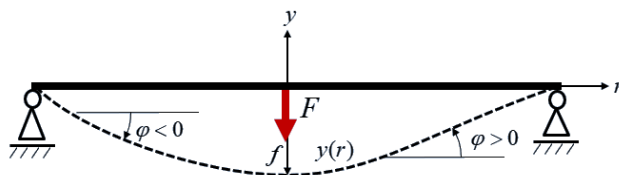
$$s_{gr/JO} = \pi \sqrt{\frac{2E}{R_e}} \quad k_s = R_e - \frac{R_e^2 \cdot s^2}{4E\pi^2}$$

2.2 Pręt smukły ($s > s_{gr}$) $k_s = \frac{\pi^2 E}{s^2}$

Wyboczenie – współczynnik mocowania



Płyty - teoria



Równanie linii ugięcia płyty $\left(\frac{1}{r} (r \cdot y'(r))'\right)' = \frac{t}{D}$

Sztywność płytowa $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$

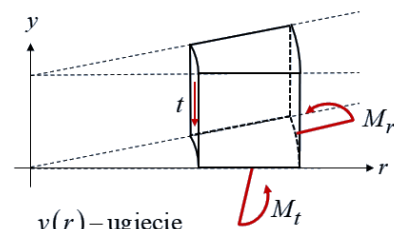
Moment gnący promieniowy $M_r = D(y''(r) + \frac{\nu}{r} y'(r))$

Moment gnący obwodowy $M_t = D\left(\frac{1}{r} y'(r) + \nu y''(r)\right)$

Naprężenie promieniowe $\sigma_{r/MAX} = \frac{6M_r}{h^2}$

Naprężenie obwodowe $\sigma_{t/MAX} = \frac{6M_t}{h^2}$

Płyta – płaski element (o jednym wymiarze mniejszym niż pozostałe) obciążony prostopadle do płaszczyzny środkowej



$y(r)$ – ugięcie

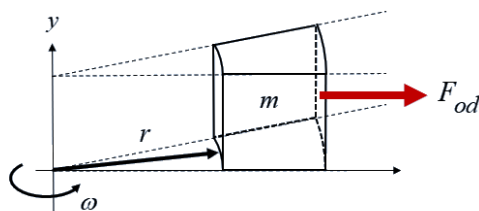
$\varphi(r) = y'(r)$ – kąt ugięcia

$f = |y(r)_{MAX}|$ – strzałka ugięcia

t – jednostkowa siła tnąca

h – grubość płyty

Siła odśrodkowa – rodzaj siły bezwładności, która odpycha ciała poruszające się ruchem obrotowym od osi obrotu.



$$F_{od} = m \cdot a_{od} = m \cdot r \cdot \omega^2$$

$F_{od} [N]$ – siła odśrodkowa

$a_{od} \left[\frac{m}{s^2}\right]$ – siła odśrodkowa

$m [kg]$ – masa

$\omega \left[\frac{rad}{s}\right]$ – prędkość kątowa

$r [m]$ – promień obrotu